平成２１年１１月２０日　八起数学塾

アーベルの連続性定理

1　アーベルの連続性定理

1.1　アーベルの連続性定理

よく知られているように、ベキ級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ はその収束半径より小さな半径の（複素平面上の 0 を中心とする）円盤上で一様に絶対収束する。従って部分和（多項式）の連続性から収束半径内での連続性が得られる。

ここで更にその収束円上の点 z_0 において $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{t\to 1}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z_0 t)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k$ が成り立つ。但し t は実数で $|t| < 1$ とする。

上記の「更に」以下の内容を**アーベルの連続性定理**と呼ぶ。最後の但し書きによって z_0 への近づかせ方に一定の制限が加わっていることに注意せよ。外部では級数が発散するので、収束円の内部から近づけるのは当然だが、それに加えてさらにその半径に沿って近づけるべきことが要求されるているのである[*1]。

1.2　アーベルの連続性定理の証明

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z_0 t)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k t^k$ である。$a_k z_0^k$ を a_k に改めて書き換えてやれば分る様に、$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ の収束半径が 1 で $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ が収束する場合に『$\displaystyle\lim_{t\to 1}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ 但し t は実数で $|t| < 1$』を示せば十分である。そしてそのためには $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ が収束するという条件下で t のベキ級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ の収束が区間 $(0,\ 1]$ において一様収束になっていることを示せばよい。これが示されれば $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ が $(0,\ 1]$ において連続であることが分るから、『』内で述べたことが成立する（t が実数かつ $|t| < 1$ という条件で t を 1 に近づければ、いずれにしても最終的には $t \in (0,\ 1]$ となることに注意)。ここで用いられるのが**アーベルの級数変化法**と呼ばれる巧妙なトリックである。

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ が収束するので、コーシーの収束条件から $\forall\varepsilon > 0$ に対して整数 N が存在して、$N < m \le n$ となる任意の整数 m, n に対して $\displaystyle\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ となる。

ここで $s_{m-1} = 0,\ s_k = \displaystyle\sum_{i=m}^{k} a_i$ と置くと $|s_k| < \varepsilon,\ a_k = s_k - s_{k-1}\ (k \ge m)$ である。よって $m < n$ の場合

[*1] なお、この条件はもっと緩和できる Lars V.Ahlfors 著 COMPLEX ANALYSIS の *Abel's Limit Theorem* 参照。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k t^k &= \sum_{k=m}^{n} \left(s_k - s_{k-1}\right) t^k = \sum_{k=m}^{n} s_k t^k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} t^k = \sum_{k=m}^{n} s_k t^k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k t^{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k t^k + s_n t^n - \left(s_{m-1} t^m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k t^{k+1}\right) = s_n t^n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k t^k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k t^{k+1} \\
&= s_n t^n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k \left(t^k - t^{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

この式と $t \in (0,\ 1]$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k t^k\right| &= \left|s_n t^n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k \left(t^k - t^{k+1}\right)\right| \leq |s_n| t^n + \sum_{k=m}^{n-1} |s_k| \left(t^k - t^{k+1}\right) < \varepsilon t^n + \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} \left(t^k - t^{k+1}\right) \\
&= \varepsilon t^n + \varepsilon \left(t^m - t^n\right) = \varepsilon t^m \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

よって $\forall\varepsilon > 0$ に対して整数 N が存在して、$N < m < n$ となる任意の整数 m, n および $\forall t \in (0,\ 1]$ に対して $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k t^k\right| < \varepsilon$ となる。また $N < m = n$ の場合も $\left|\sum_{k=m}^{m} a_k t^k\right| = |a_m t^m| = |s_m t^m| = |s_m|\, t^m < \varepsilon t^m \leq \varepsilon$ となって同様であるから、コーシーの収束条件により t のベキ級数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ の収束は区間 $(0,\ 1]$ において一様収束であることが分った。

2　アーベルの級数変化法と部分積分

以下ではアーベルの級数変化法における級数の変形が、部分積分法と同等であることを説明する。これは一種の数学の捉え方（哲学）の話であり、いわゆる数学的に厳密な議論とは性質を異にするが、このように統一的な見解を持つことは大切である。

和 $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k$ をアーベルの級数変化法で行ったのと同様のやり方で変形してみよう。

$s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$ と置くと $m \geq 1$ に対して $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} \left(s_k - s_{k-1}\right) b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k \left(b_{k+1} - b_k\right)$ である。ここで以下のようにこの式の記号を置き換えてみる。

$$
\sum_{k=\alpha}^{\beta} \to \int_{\alpha}^{\beta},\ s_k \to s\left(k\right),\ b_k \to b\left(k\right),\ k \pm 1 \to k \pm dk,\ m-1 \to m - dm,\ n-1 \to n - dn
$$

但し $dk,\ dm,\ dn$ はすべて無限小とする。

$$
\int_{m}^{n} \left(s\left(k\right) - s\left(k - dk\right)\right) b\left(k\right) = s\left(n\right) b\left(n\right) - s\left(m - dm\right) b\left(m\right) - \int_{m}^{n-dn} s\left(k\right)\left(b\left(k + dk\right) - b\left(k\right)\right)
$$

ここで dk が無限小であることから

$$
s\left(k\right) - s\left(k - dk\right) = \frac{s\left(k - dk\right) - s\left(k\right)}{-dk} dk = s'\left(k\right) dk
$$

および

$$b\left(k+dk\right)-b\left(k\right)=\frac{b\left(k+dk\right)-b\left(k\right)}{dk}dk=b'\left(k\right)dk$$

さらに dm と dn が無限小であることに注意して以下の結果を得る。

$$\int_{m}^{n}s'\left(k\right)b\left(k\right)dk=s\left(n\right)b\left(n\right)-s\left(m\right)b\left(m\right)-\int_{m}^{n}s\left(k\right)b'\left(k\right)dk$$

これは部分積分の公式に他ならない。以上から分るように、アーベルの級数変化法における級数の変形は、部分積分法の ” 離散版 ” と考えてよい。