平成２１年７月１０日　八起数学塾

随伴変換

V を n 次元複素計量線型空間とし、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ でエルミート積を表す。また、T,S を V の線型変換とする。

1　定義

（１）随伴変換

任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(T^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}))$ が成り立つような V の線型変換 T^* を T の随伴変換と呼ぶ。

（２）正規変換、エルミート変換、ユニタリ変換

それぞれ $T^*T=TT^*$ が成り立つとき T は正規変換、$T^*=T$ が成り立つとき T はエルミート変換、$T^*=T^{-1}$ が成り立つとき T はユニタリ変換であると言う。

2　随伴変換の存在と一意性

（１）存在

V の正規直交基底（シュッミットの直交化法によって必ず存在する）を任意に一つ取って固定し、それを $<\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\dots,\boldsymbol{e_n}>$ とする。ここで $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $T^*(\boldsymbol{x})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{e_i}))\boldsymbol{e_i}$ と置けば、T^* は V の線型変換である。$\boldsymbol{y}\in V$ を任意に取って、$\boldsymbol{y}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{e_i}$ とすると、$<\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\dots,\boldsymbol{e_n}>$ が正規直交基底であることから $(\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{y})=\bar{y}_i$ であることに注意する。

$$(T^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{e_i}))\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{e_i}))(\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{e_i}))$$

一方

$$(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x}|\sum_{i=1}^{n}y_iT(\boldsymbol{e_i}))=\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{e_i}))$$

であるから $(T^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}))$ が成り立つ。

注意：上記は正規直交基底 $<\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\dots,\boldsymbol{e_n}>$ による T の行列表示を A とし、その A の随伴行列 A^* に対応する V の線型変換を T^* とするのと同じである。

（２）一意性

f,g を V から V への写像とする。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(g(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$ が成り立つとすると $0=(f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})-(g(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$ であるが、ここで $\boldsymbol{y}$ は任意だから $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})$ と置けば $\|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|^2=(f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))=0$ となる。よって $f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ である。従って $f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ であり、$\boldsymbol{x}$ は任意だから結局 $f=g$ である。

T_1^*,T_2^* を T の随伴変換とする。任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(T_1^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}))=(T_2^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$ であるから、上記で示したことにより $T_1^*=T_2^*$ が分る。

注意：以上のことから正規直交基底による T の行列表示を A とするとき以下が成り立つことが容易に分る。

1. T が正規変換 $\Longleftrightarrow$ A が正規行列
2. T がエルミート変換 $\Longleftrightarrow$ A がエルミート行列
3. T がユニタリ変換 $\Longleftrightarrow$ A がユニタリ行列

3 *の性質

1. $T^{**} = T$
2. $(TS)^* = S^*T^*$
3. $(T+S)^* = T^* + S^*$

これらはそれぞれ以下の計算と「2 節（2）の一意性」から分る。

1. $T^{**} = T$

$$(T^{**}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|T^*(\boldsymbol{y})) = \overline{(T^*(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}|T(\boldsymbol{x}))} = (T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$$

2. $(TS)^* = S^*T^*$

$$((TS)^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|TS(\boldsymbol{y})) = (T^*(\boldsymbol{x})|S(\boldsymbol{y})) = (S^*T^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$$

3. $(T+S)^* = T^* + S^*$

$$\begin{aligned}((T+S)^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}|(T+S)(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}) + S(\boldsymbol{y})) \\ &= (\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y})) + (\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{y})) = (T^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) + (S^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) \\ &= (T^*(\boldsymbol{x}) + S^*(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = ((T^* + S^*)(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

4 固有値

（1）エルミート変換の（従ってエルミート行列の）固有値は実数である。
T をエルミート変換、α を T の固有値、$\boldsymbol{a}$ を α に対応する T の固有ベクトルとすると

$$\bar{\alpha}(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}|\alpha\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}|T(\boldsymbol{a})) = (T^*(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}) = (T(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}) = (\alpha\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a})$$

よって $\bar{\alpha} = \alpha$ なので α は実数である。

（2）ユニタリ変換の（従ってユニタリ行列の）固有値は絶対値が 1 の複素数である。
U をユニタリ変換、α を U の固有値、$\boldsymbol{a}$ を α に対応する U の固有ベクトルとすると

$$|\alpha|^2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = \alpha\bar{\alpha}(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = (\alpha\boldsymbol{a}|\alpha\boldsymbol{a}) = (U(\boldsymbol{a})|U(\boldsymbol{a})) = (U^*U(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}) = (U^{-1}U(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a})$$

ここで $\boldsymbol{a}$ が固有ベクトルだから $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 従って $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) \neq 0$ である。よって $|\alpha| = 1$ となって、α の絶対値が 1 であることが分った。

5　固有空間

エルミート変換の異なる固有値に対する固有空間は直交する。

T をエルミート変換、$\alpha \neq \beta$ を T の異なる固有値、$\boldsymbol{a}$ を α に対応する T の固有ベクトル、$\boldsymbol{b}$ を β に対応する T の固有ベクトルとする。α, β が実数であることに注意せよ

$$\alpha(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = (T(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}|T(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}|\beta\boldsymbol{b}) = \beta(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$$

よって $(\alpha - \beta)(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = 0$ となるが、$\alpha - \beta \neq 0$ だから $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = 0$ が分る。