平成２１年5月１３日　八起数学塾

基底の取替え行列

1　定義

V を体 K 上の n 次元ベクトル空間として、$E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n >$ 及び $E' =< \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots \boldsymbol{e}'_n >$ をその基底とする。

$\boldsymbol{e}'_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n$ と表す（E は基底なのでこの表現はただ一通り可能）と以下のような行列表現が可能である。

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

この行列を基底の取替え $E \longrightarrow E'$ の行列と呼ぶ。

2　解釈その１

基底 E による自然な線型写像 $V \longrightarrow K^n$ を γ とする。
つまり $\boldsymbol{x} \in V$ を基底 E で表して $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ とするとき

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とする。
また $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i$ によって線型変換 $f : V \longrightarrow V$ を定める。
このとき下の可換図式の線型変換 $K^n \longrightarrow K^n$ を表現する行列が基底の取替え $E \longrightarrow E'$ の行列である。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ K^n & \longrightarrow & K^n \end{array}$$

3 解釈その２

$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ を

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と行列の積の形に書いてみる。
同様に

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots \boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

とする。
これに定義の式を代入して整理すると

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

となっているから、基底による表現の一意性に注意して

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

が得られる。
よって基底 E による自然な線型写像 $V \longrightarrow K^n$ を γ、また基底 E' による自然な線型写像 $V \longrightarrow K^n$ を δ とするとき、下の可換図式の線型変換 $K^n \longrightarrow K^n$ を表現する行列が基底の取替え $E \longrightarrow E'$ の行列である。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\text{恒等写像}"] \arrow[d, "\delta"'] & V \arrow[d, "\gamma"] \\ K^n \arrow[r] & K^n \end{tikzcd}$$

（V を E' で表現した K^n から V を E で表現した K^n への線型変換になっている。その写像の向きに注意が必要である。）