初等平面幾何学入門

八起数学塾

2012年8月１３日

1　基本事項

公理と呼ばれる少数の前提から様々な結論を導く。これが公理主義と呼ばれる、ユークリッド以来の数学のやり方である。しかし初めから完全な形で公理主義を理解するのは無理である。そこでここでは直感を基礎として、一部公理を交えて話を展開する。いくつかの自明とも思われる事柄から、決して自明ではない複雑な結論が得られるのだということが分かればよい。
なお以下は、すべてある一定の平面内の話である。このことは今後いちいち断らない。

1.1　基本的な用語

これから点、直線、角、距離、平面、三角形、円等の用語を使うが、これらについては常識的に知っているそれと考えてよい。

1.1.1　平行線

定義 1.1. 異なる直線 l と m が交わらないとき、l と m は平行であるという。これを $l \parallel m$ という記号で表す。

1.1.2　角についての用語

角と角との関係についての用語をいくつか述べる。

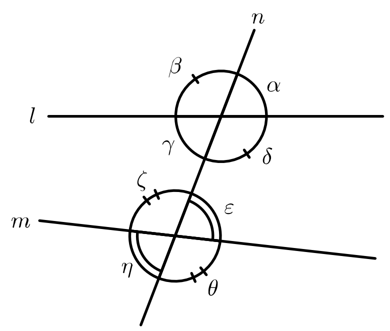

図１

２直線の交点で向かい合う角を対頂角という。上の図では α と γ、β と δ、ε と η、ζ と θ がそれぞれ互いに対頂角である。また α と ε、β と ζ、γ と η、δ と θ はそれぞれ互いに同位角であるという。また γ と ε、δ と ζ はそれぞれ互いに錯角であるといい、γ と ζ、δ と ε はそれぞれ互いに同側内角であるという。

1.1.3　必要条件と十分条件

「人間は動物である」を数学的に都合のいい表現に変えると、「人間ならば動物である」となる。このとき、人間であることは動物であるための十分条件であるといい、動物であることは人間であるための必要条件であるという。実際それが動物であるためには、それが人間であれば十分であり、逆にそれが人間であるためには、少なくともそれが動物であることが必要である。それだからこの定義は納得できるだろう。一般に「A ならば B である」が正しい主張であるとき、A は B であるための十分条件であるといい、B は A であるための必要条件であるという。さらに「A ならば B である」と「B ならば A である」が両方とも正しい主張であるとき、A は B であるための必要十分条件（従ってまた、B は A であるための必要十分条件）であるという。

1.1.4　その他の用語

その他の用語は以下必要に応じてそのつど説明する。

1.2　公理

公理１：異なる２点が任意に与えられたとき、それらを通る直線が存在する。
公理２：２直線が交わるときは、いつもただ１点で交わる。
公理３（平行線公理）：任意に与えられた直線 l とその直線上にない点 P に対して、P を通り l に平行な直線がただ一つ存在する。
これらのことは明白であると思うかもしれない。事実数学においても、長い間これらのことは明白なことと考えられてきた。しかしながら現代の数学においては、これらは一つの仮定である。

問 1.2. 公理１から「１点が任意に与えられたとき、その点を通る直線が存在する」を示せ。

問 1.3. 公理１と公理２から「異なる２点が任意に与えられたとき、それらを通る直線がただ１つ存在する」を示せ。

問 1.4. l, m, n を異なる直線とする。$l \mathbin{/\!/} m$ かつ $m \mathbin{/\!/} n$ なら $l \mathbin{/\!/} n$ であることを示せ（ヒント：l と n が交点 P を持つとすると、平行線公理に矛盾する）。

直感を基礎にして、一部公理を交えて議論するという方針に基づいて、公理として紹介いするのは上記３つだけだが、この３つの公理だけで幾何学のすべてのことが導けるわけではない。その他にもいろいろと必要である。思いつくままに書いてみると

1. どの直線も少なくとも１つの点を含む
2. 平面は少なくとも２点を含む
3. l を直線、P を l 上の点とする。P は l を２分する。このとき２分されたそれぞれに、それぞれ P を加えたものを、それぞれ P を始点とする半直線と呼ぶ。
4. １つの直線は平面を２分する。

5. PX を P を始点とする半直線、α を実数とする。このとき P を始点とする半直線で、PX と角度 α をなすものがただ１つ存在する。（注）
6. 直線 l がその上の点 P によって半直線 PX 半直線 PY に分かたれているとき、PY は PX と $180°$ の角度を成す。但し $180°$ とは１周の半分の角度である。
7. l を直線、P を l 上の点、P によって２分された半直線を PX, PY、d を正の実数とする。このとき P から距離 d にある点が PX, PY 上にそれぞれただ１つ存在する。

注：P を始点とする半直線を、適当に選んだその半直線上の P 以外の点 X（7. よりそれは存在する）を使って、PX と表示する。この場合始点 P の方を先に書く。以下同じ。また、角度は左回りに測る。負の角度は右に回ることを意味する。

以上をとりあえず「暗黙の了解事項」ということする。加えて平行移動や点の周りの回転移動、さらに直線に対する対称移動といったことを、下の図を見て直感的に了解してもらいたい。なお、これらによって図形の長さや角度が変わらないことに注意されたい[*1]。

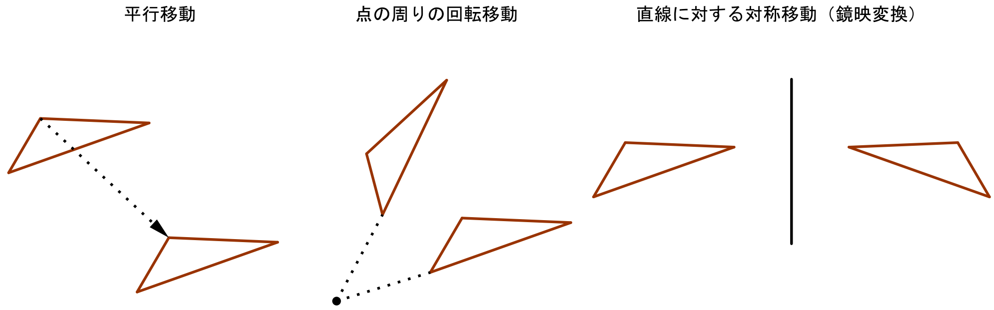

図 2

この節の最後に線分という言葉を説明しておく。

定義 1.5. P, Q を平面上の点とする。$P \neq Q$ ならこれを通る直線はただ１つ存在し、よって半直線 PQ と半直線 QP がある。ここで半直線 PQ と半直線 QP の共通部分を P と Q を結ぶ線分と呼び、線分 PQ と表示する。$P = Q$ のときは線分 PQ とは点 P（従って Q）のこととする。以上非常に回りくどいが、要するに普通に線分をイメージすればよい。

2　最も基本的な定理

2.1　中点、角の２等分線、垂線

2.1.1　線分の中点

AB を線分とする。A, B 間の距離をその線分の長さという。以下混乱の無い限り、AB の長さも単に AB で表す。早速その表現を使って $AB = d$（つまり AB の長さが d である）とする。このとき暗黙の了解事項の 7. に注意すれば、AB 上の M 点で $AM = \dfrac{d}{2} = BM$ となる点がある。この M を線分 AB の中点という。ま

[*1] このことは空間の等方性の仮定とでもいうべきものである。これらの移動（変換）によって変わらない性質について考察するというのが、現代的な平面幾何学のやり方である。

た点 A と点 B の中点ともいう。

2.1.2 角の２等分線

半直線 PX から半直線 PY に測った角度を α とする。このとき暗黙の了解事項の 5. に注意すれば、半直線 PX から測って角度 $\frac{\alpha}{2}$ の位置にある半直線 PM が存在する。これを（半直線 PX と半直線 PY が作る）角の２等分線という。

2.1.3 垂線

l を直線、P をその上の点とする。暗黙の了解事項の 3. より、l は半直線 PX と半直線 PY に分かたれる。暗黙の了解事項の 6. より、PX から PY に至る角は $180°$ である。この角を２等分する半直線を PM とすると、PX から PM に至る角は $90°$ である。さて半直線はその定義（暗黙の了解事項の 3.）より、何らかの直線の一部である。PM を含んでいる直線を m とする。PM が２つ以上の点を含むことと問 1.3 より、PM を含む直線は m のみである。この m は P を通り、l と $90°$ の角を成す。そしてもちろん、P を通り、l と $90°$ の角を成す直線はこの m だけである。$90°$ を直角という。また m は l に垂直であるといい、$m \perp l$ で表す（この場合当然 $l \perp m$ でもある）。これを使って次の定理を示す。但し後述する定理 2.4（平行線と同位角の関係）を使う。

定理 2.1. l を直線、P を点とする。P を通り l に垂直な直線がただ１つ存在する。

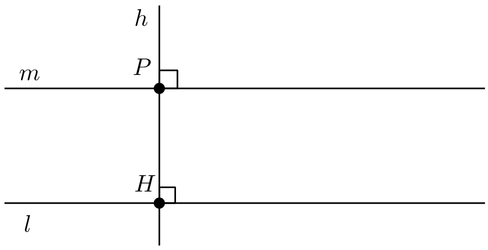

図 3

証明：P が l 上にあれば、P を通り l に垂直な直線がただ１つあることはすでに分かっている。よって P は l 上にないとする。この場合、P を通り l に平行な直線がただ１つある。それを m とする。ここで P を通り m に垂直な直線を h とする。もし h が l と平行であれば、l が m に平行であることから h と m が平行となるが、h と m は P で交わっているのだから矛盾である。また h は P を通り、l は P を通らないので h と l は異なる。よって h と l はただ１つの点で交わる。その交点を H とする。ここで後述する定理 2.4（平行線と同位角の関係）を使えば、h が P を通り l に垂直な直線であることが分かる。なおこれが一意的であることの証明は、後述の定理 3.1 の後での演習とする。

上記定理の h を、P を通る l の垂線、あるいは P から l に下した垂線と呼ぶ。また H を P から l に下した垂線の足ともいう。

以上ここまではかなり細かく述べてきたが、以降はこれほど細かくは述べない。直感的に納得してもらえればよい。

2.2　対頂角は等しい

定理 2.2. 対頂角は等しい

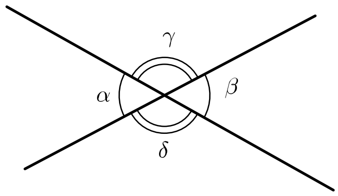

図 4

証明：上の図で $\alpha = \beta$ および $\gamma = \delta$ を示す。$\alpha + \gamma = 180°$ また $\beta + \gamma = 180°$ ゆえに $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ よって $\alpha = \beta$ そして同様に $\gamma = \delta$ である。

問 2.3. 「同様に $\gamma = \delta$ である」と述べたが、本来は $\alpha = \beta$ から直ちに $\gamma = \delta$ が諒解されるべきである。そのわけを考えよ。

2.3　平行線の同位角は等しい

定理 2.4. 2 直線 l と m が平行であるための必要十分条件は、l および m と交わる任意の直線 n により生じる同位角が等しいことである。

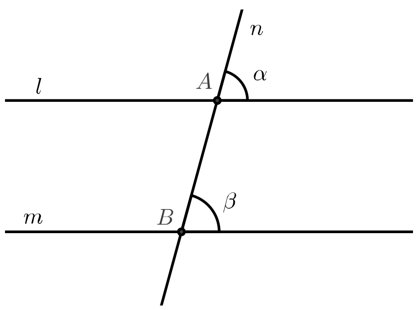

図 5

証明：初めに $\alpha = \beta$ のとき $l \parallel m$ であることを示す。仮に $\alpha = \beta$ でありながら $l \parallel m$ でないことがあったとする。このとき l と m は交点を持つ。それを P としよう。まず P は n 上にはない。実際もし n 上にあるとすると P は少なくとも A, B のどちらか一方とは異なるから、例えば $P \neq A$ とすると l と n が異なる 2 点 A, P を通過することになり、問 1.3 より $l = n$ となる。しかし l は m と交わらず、一方 n は m と交わるので $l \neq n$ だから矛盾である。$P \neq B$ のときも同様に $m = n$ かつ $m \neq n$ となるので矛盾である。よって P は n の右方もしくは左方にある。とりあえず右方にあるとして議論を続ける。A と B の中点を中心として全体を $180°$ 回転させる。このとき n は n 自身に反転して重なり、A は B に、B は A に重なる。対頂角が等しいことに注意すると l は m に、m は l にそれぞれそれ反転して重なることが分かる。このとき P は n の左側に移

るが、これは l, m が n の両側で交点を持つことを意味する。そうすると再び問 1.3 より $l = m$。しかしこれは仮定に反し矛盾である。P が n の左方にあるとした場合も同様に矛盾となるから、$\alpha = \beta$ なら $l \mathbin{/\mkern-6mu/} m$ であることが分かった。

逆に $l \mathbin{/\mkern-6mu/} m$ のとき $\alpha = \beta$ であることを示す。A を通り β とその同位角が等しい直線 l' を考える。先に示したように $l' \mathbin{/\mkern-6mu/} m$ であるが、平行線公理により A を通り m に平行な直線はただ一つしかないので、$l' = l$。ゆえに $\alpha = \beta$ である。

問 2.5. 上の定理で「同位角」の代わりに「錯角」としても正しいことを示せ。また「同側内角」を使って定理を述べなおしてみよ。

問 2.6. l, m, n, k を直線とする。$l \mathbin{/\mkern-6mu/} m$ かつ $l \perp n$ かつ $m \perp k$ なら $n = k$ または $n \mathbin{/\mkern-6mu/} k$ を示せ。(ヒント:定理 2.1 の証明参照)。

3　三角形に関する定理

3.1　三角形の内角の和

定理 3.1. 三角形の内角の和は 180° である。

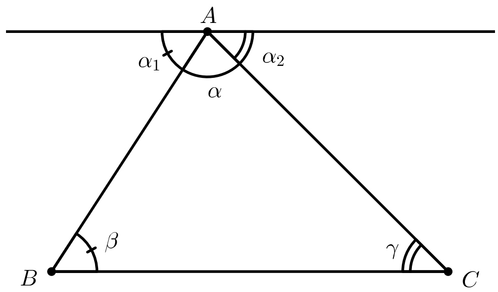

図 6

証明:上の図で三角形 ABC の底辺 BC に平行で頂点 A を通る直線を引くと、錯角が等しいから、$\beta = \alpha_1$ かつ $\gamma = \alpha_2$。よって $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180°$。これで示された。

問 3.2. 四角形の内角の和は 360° である。これを示せ。一般に n 角形の内角の和はどうなるか。また正 n 角形の１つの内角の大きさを n で表せ。

問 3.3. l を直線、P を点とする。P を通り l に垂直な直線がただ１つ存在する。これについて、存在はすでに示した(定理 2.1)。これがただ１つであることを証明せよ(ヒント:２つあるとして矛盾を導く)。

3.2 二等辺三角形

定理 3.4. 三角形 ABC が $AB = AC$ の二等辺三角形であるための必要十分条件は、$\angle ABC = \angle ACB$[*2]（通常底角が等しいと表現する）である。

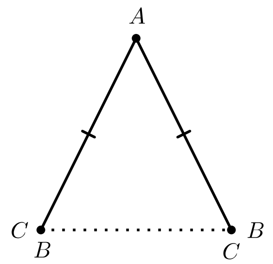

図 7

証明：三角形 ABC が $AB = AC$ の二等辺三角形であるとする。この三角形を裏返して元の三角形に A が A に重なるように、半直線 AB を半直線 AC に、半直線 AC を半直線 AB にそれぞれ重ねる。このとき $AB = AC$ だからちょうど B が C に、C が B にそれぞれ重なる。従って $\angle ABC$ が $\angle ACB$ に、$\angle ACB$ が $\angle ABC$ にそれぞれ重なることになるから $\angle ABC = \angle ACB$ である。

逆に $\angle ABC = \angle ACB$ とする。この三角形を裏返して、今度は線分 BC と線分 CB が重なるように元の三角形に重ねる。但し両者の A は直線 BC[*3]に関して同じ側に取る。このとき $\angle ABC = \angle ACB$ だから直線 BA が直線 CA に、直線 CA が直線 BA にそれぞれ重なるが、A は 2 直線の交点であり、それは一つしかないので A は A に重なり、よって $AB = AC$ が分かった。

問 3.5. 上記で辺 BC の中点を M とするとき、$BC \perp AM$ であることを、上記の証明を参考にして示せ。さらに頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を H とするとき、$H = M$ となることを示せ（ヒント：問 3.3 を使う)。

[*2] $\angle ABC$ は半直線 BC と BA が作る角およびその大きさを表す。これだけだとその角はどちらの半直線からどちらの半直線へ測るのかが分からないが、通常特に断らない限り、$0°$ 以上 $180°$ 以内の角度になる方を意味する。

[*3] B, C を通る直線を直線 BC と表現する。

3.3 三角不等式

定理 3.6. 三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい（長い）。

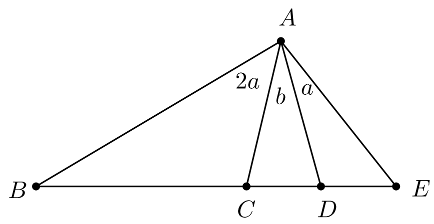

図 8

証明： AB を最長辺として、$AB < BC + CA$ を示せばよい。$AB = BC$ ならば明らかだから、$AB > BC$ とする。辺 BC を延長して $BA = BD$ となる点 D を取る。このとき $\angle BAD = \angle BDA$ である。さらに $\frac{1}{2}\angle BAC = a$ と置き、$\angle DAE = a$ となるように、辺 BD の延長上に点 E を取る。また $\angle CAD = b$ と置く。そうすると

$$\begin{aligned}\angle CEA &= 180^\circ - (a + \angle ADE)\\ &= 180^\circ - (a + 180^\circ - \angle BDA)\\ &= \angle BDA - a\\ &= \angle BAD - a\\ &= 2a + b - a\\ &= a + b\\ &= \angle CAE\end{aligned}$$

であるから

$$BA = BD < BE = BC + CE = BC + CA$$

となって示された。

系 3.7. 角に向かい合う辺の長さの大小はその向かい合う角の大小と同じである。

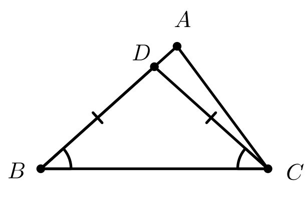

図 9

証明： 三角形 ABC で $\angle ABC < \angle ACB$ とするとき、$AC < AB$ を示せばよい。
上の図のように $\angle BCD = \angle ABC$ となるように直線 BA 上に点 D を取る。$\angle ABC < \angle ACB$ なので D は B と A の間にある。ここで $BD = CD$ なので $BA = BD + DA = CD + DA > CA$。よって示された。

問 3.8. 点 A と A を通らない直線 l を考える。
B を l 上の点とするとき、AB の長さが最短になるのは $AB \perp l$ の場合であり、そのときに限ることを示せ。

3.4 三角形の合同条件

3.4.1 平面図形の合同

$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ を平面上の二つの図形とする。$\mathbb{A}$ に以下の操作を有限回組み合わせて $\mathbb{B}$ にぴったり重ね合わせることができるとき、$\mathbb{A}$ は $\mathbb{B}$ に合同であるといい、$\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ であらわす。

1. 平面内の平行移動（まったく移動しない場合も距離 0 の平行移動と考える)。
2. 勝手に選んだ平面内の点の周りの回転移動（まったく回転しない場合も回転角 0 の回転移動と考える)。
3. 勝手に選んだ平面内の直線に関する対称移動。

「合同」は明らかに以下の性質を持つ。

1. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}$ に関して $\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}$ である。
2. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ に関して、$\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ なら $\mathbb{B} \equiv \mathbb{A}$ である。
3. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ に関して、$\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ かつ $\mathbb{B} \equiv \mathbb{C}$ なら $\mathbb{A} \equiv \mathbb{C}$ である。

以下簡単のため三角形 ABC を $\triangle ABC$ と表記する。例えば $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ は三角形 ABC が三角形 DEF に合同であるという意味である。

3.4.2 三角形の合同条件

定理 3.9. 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい三角形は合同である。

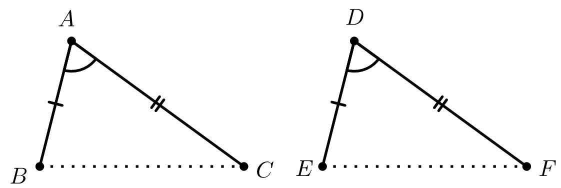

図 10

証明： $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で $AB = DE,\ AC = DF,\ \angle BAC = \angle EDF$ とする。$AB = DE$ だから、線分 AB を線分 DE にぴったり重ねる[*4]ことができる。このとき頂点 C と頂点 F を直線 DE の同じ側に置けば、$\angle BAC = \angle EDF,\ AC = DF$ から、頂点 C と頂点 F は重なり、よって $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ はぴったり重なる。よって $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ である。

[*4] もちろん A と D、B と E が重なるように重ねるという意味である。これが線分 AB を線分 ED にぴったり重ねるという表現なら、A と E、B と D が重なるように重ねるという意味である。以下同じ。

問 3.10. 2辺および、その2辺の間の角とは違う1つの内角がそれぞれ等しい三角形の場合は、合同とは限らない。このことを下の図を参考に考えよ。しかしそれにもかかわらず、2つの直角三角形については、斜辺（直角と向かい合う辺のこと）と他の1辺がそれぞれ等しいとき、それらは合同になる（直角は斜辺と他の1つの辺との間の角ではない）。これを示せ（ヒント：斜辺以外の等しい辺どうしを貼り合わせると二等辺三角形ができる）。

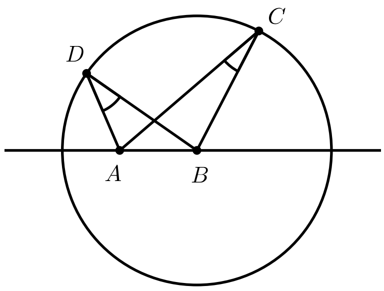

図 11

問 3.11. A, B を平面上の異なる点とする。線分 AB の垂直2等分線上の任意の点は A と B から等距離にあり、逆に A と B から等距離にある点はこの垂直2等分線上にある。これを示せ。なお AB の垂直2等分線とは、線分 AB の中点を通り線分 AB に垂直な直線をいう。

問 3.12. 1つの直線上にない3つの点を通る円はただ1つ存在する。これを示せ。また、1つの直線上にある3つの点を通る円は存在しないことを示せ。

問 3.13. （三角形の外心）
三角形の各辺の垂直2等分線（合計3本ある）は1点で交わる。これを示せ。この点を外心といい、その三角形の外接円（その三角形の3つの頂点を通る円）の中心である。

定理 3.14. 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同である。

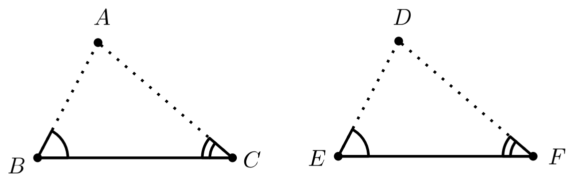

図 12

証明： $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ とする。$BC = EF$ より、線分 BC を線分 EF にぴったり重ねることができる。このとき頂点 A と頂点 D を直線 EF の同じ側に置く。そうすると $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ から、直線 BA と直線 ED および直線 CA と直線 FD がそれぞれ重なり、交点はただ1つだから頂点 A と頂点 D は重なる。よって $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ はぴったり重なる。よって $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ である。

問 3.15. OP, OQ, OX を O を通る直線とし。直線 OX は角 POQ を2等分しているとする。このとき直

線 OX 上の点はすべて直線 OP と直線 OQ から等距離にある。これを示せ。なお、点 P と直線 l との距離とは、P を通り l と垂直な直線と l との交点を Q としたときの、線分 PQ の長さをいう。

問 3.16. （三角形の内心）
三角形の内角の２等分線（合計３本ある）は１点で交わる。これを示せ。この点を内心といい、内接円（その三角形のすべての辺と接する円[*5]）の中心である。

定理 3.17. ３辺がそれぞれ等しい三角形は合同である。

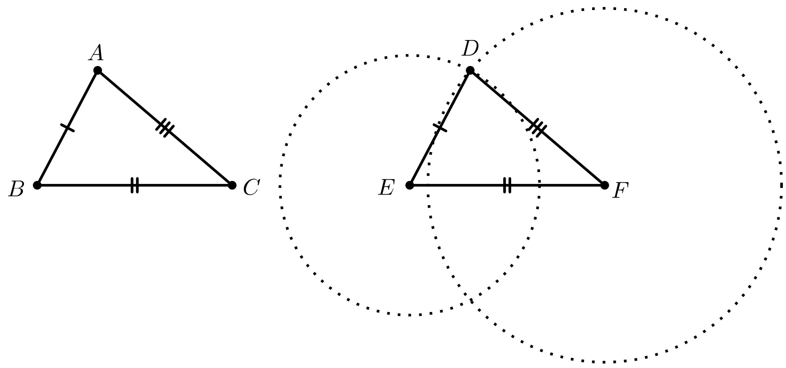

図 13

証明： $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で $AB = DE,\ BC = EF,\ CA = FD$ とする。$BC = EF$ より、線分 BC を線分 EF にぴったり重ねることができる。このとき頂点 A と頂点 D を直線 EF の同じ側に置く。頂点 D は、E を中心とする半径 ED の円と F を中心とする半径 FD の円との交点である。先に述べたやり方で $\triangle ABC$ を $\triangle DEF$ に重ねると、$AB = DE,\ CA = FD$ より、頂点 A も両円の交点に来る。もし頂点 A と頂点 D が重ならないなら直線 EF に対する両円の対称性から、両円の交点は４つ以上ということになるが、これでは問 3.12 より、両円が一致することになり矛盾である。よって頂点 A と頂点 D は重なり、従って $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ もぴったり重なる。よって $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ である。

問 3.18. 向かい合う２組の辺がそれぞれ平行である四角形を平行四辺形と呼ぶ。以下を示せ。

1. 平行四辺形の向かい合う角の大きさは等しい。
2. 平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しい。
3. 向かい合う２組の角の大きさがそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。
4. 向かい合う２組の辺の長さがそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。
5. 向かい合う１組の辺の長さが等しくかつそれらが平行であるような四角形は平行四辺形である。

3.4.3　三角形の面積

三角形の面積は「底辺 $\times$ 高さ $\div$ 2」で与えられる。これを改めて確かめよう。まず面積については以下が成り立つ。

[*5] 定義 4.1 参照

1. 長方形の面積は「縦 × 横」である。
2. ２つの図形が合同なら、それらの面積は等しい。
3. 図形を有限個の部分に重複や欠けがないように分割するとき、それらの面積の和は元の図形の面積に等しい。

ここではこれらは正しいものと認めてもらうことにして、以下これらを使って議論を進める。

定理 3.19. 平行四辺形の面積は「底辺 × 高さ」で与えられる。

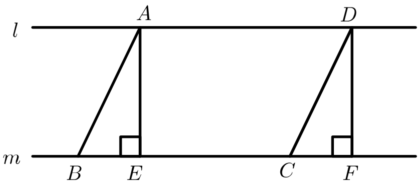

図 14

証明： 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD を含む直線を l、辺 BC を含む直線を m とする。A から m に下した垂線の足を E、D から m に下した垂線の足を F とする。このとき $AE /\!/ DF$。またもちろん $AD /\!/ EF$ だから四角形 $AEFD$ は平行四辺形で、さらに内角の角度を考えれば長方形であることが分かる。ここで $AB = DC,\ AE = DF,\ \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$ より $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$。よって平行四辺形 $ABCD$ の面積 $=$ 長方形 $AEFD$ の面積 $= AD \times DF = BC \times DF$。よって示された。

系 3.20. 三角形の面積は「底辺 × 高さ ÷ 2」で与えられる。

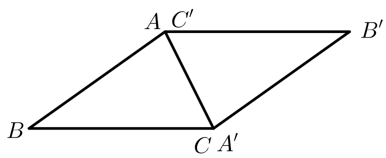

図 15

証明： $\triangle ABC$ のコピー $\triangle A'B'C'$ を作って上の図のように貼り合わせる。四角形 $ABCB'$ が平行四辺形になることは容易に示されるから、前定理より結果が従う。

問 3.21. 四角形 $ABCB'$ が平行四辺形であることを示せ。

問 3.22. l を三角形 ABC の頂点 A を通り、底辺 BC に平行な直線とする。A' を l 上の勝手な点とするとき、$\triangle A'BC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積に等しい。これを示せ。

3.4.4 三角形の相似

$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ を平面上の二つの図形とする。合同のときに説明した操作（移動）に加えて、適当な点を中心とする拡大および縮小もできるものとして、$\mathbb{A}$ を $\mathbb{B}$ にぴったり重ね合わせることができるとき、$\mathbb{A}$ は $\mathbb{B}$ に相似であるといい、$\mathbb{A} \backsim \mathbb{B}$ であらわす（例えば $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ は三角形 ABC が三角形 DEF に相似であるという意

味である)。
「相似」は合同と同様に、明らかに以下の性質を持つ。

1. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}$ に関して $\mathbb{A} \backsim \mathbb{A}$ である。
2. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ に関して、$\mathbb{A} \backsim \mathbb{B}$ なら $\mathbb{B} \backsim \mathbb{A}$ である。
3. 任意の平面上の図形 $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ に関して、$\mathbb{A} \backsim \mathbb{B}$ かつ $\mathbb{B} \backsim \mathbb{C}$ なら $\mathbb{A} \backsim \mathbb{C}$ である。

定理 3.23. $M,\ N$ をそれぞれ $\triangle ABC$ の辺 $AB,\ AC$ 上の点とする。このとき $MN /\!/ BC$ ならば $AM : AB = AN : AC = MN : BC$ が成り立つ。逆に $AM : AB = AN : AC$ が成り立てば $MN /\!/ BC$ である。

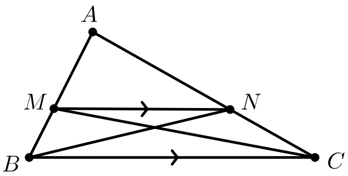

図 16

証明: 初めの主張を示す。$MN /\!/ BC$ なので、$\triangle BMN$ と $\triangle CNM$ は、MN を共通底辺としてその高さが等しい。従って $\triangle BMN$ と $\triangle CNM$ の面積は等しい。よって $\triangle ABN$ と $\triangle ACM$ の面積は等しい。この面積を S とし、$\triangle AMN$ の面積を s とする。ここで AB と AM をそれぞれ $\triangle ABN$ と $\triangle AMN$ の底辺と考えると、両者の高さは同じなので、$s : S = AM : AB$ が成り立つ。同様にして $s : S = AN : AC$ となるから、$AM : AB = AN : AC$ が分かる。今度は MN と BC をそれぞれ $\triangle BMN$ と $\triangle NBC$ の底辺と考えると、両者の高さは同じなので、両者の面積の比は $MN : BC$ である。ここで $\triangle BMN$ の面積は $S - s$ である。$\triangle NBC$ の面積を計算しよう。AN と NC をそれぞれ $\triangle BAN$ と $\triangle BNC$ の底辺と考えればこれらの面積比は $AN : NC = AN : (AC - AN) = s : (S - s)$。そして $\triangle BAN$ の面積が S だから、$S : x = s : (S - s)$ を解いて $x = \dfrac{(S-s)\,S}{s}$。よって $MN : BC = (S - s) : \dfrac{(S-s)\,S}{s} = s : S$。以上で $AM : AB = AN : AC = MN : BC$ が分かった。
逆に $AM : AB = AN : AC$ とする。M を通り BC と平行な直線と辺 AC との交点を N' とする。先に示したように $AM : AB = AN' : AC$ であるが、$AM : AB = AN : AC$ なのだから $N' = N$ でなくてはならない。
注意:上記で $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ となっている。なぜなら A を中心にして $\triangle AMN$ を $\dfrac{AB}{AM}$ 倍すれば A はそのままで、M は B に、N は C に重なる、このとき辺 AM が AB に重なることと辺 AN が辺 AC に重なることは明らかである。さらに一般に P を MN 上の点とし、直線 AP と辺 BC との交点を Q とするとき、$\triangle ABQ$ と $\triangle AMP$ との辺の比に注意すれば、P は Q に重なり、さらに線分 AP が線分 AQ に重なることが、先と同様に分かる。従って $\triangle AMN$ は内部の点を含めてぴったりと $\triangle ABC$ に重なり、よって $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ である。

問 3.24. $AM : AB = AN : AC$ は証明されたものとして、N を通り AB に平行な直線を引くことで $AN : AC = MN : BC$ を導け。

系 3.25. (中点連結定理)
$\triangle ABC$ の辺 AB の中点を M、辺 AC の中点を N とすれば $MN /\!/ BC$ かつ $MN : BC = 1 : 2$ が成り立つ。

問 3.26. 上の定理を使って中点連結定理を示せ。また上の定理を使わず、三角形の合同を用いて示せ。

問 3.27. $\triangle ABC$ の $\angle BAC$ の２等分線と辺 BC との交点を M とするとき、$AB : AC = BM : CM$ であることを示せ。

問 3.28. （三角形の相似条件）
次の主張を示せ。

1. ２辺の比とそれらにはさまれる角がそれぞれ等しい２つの三角形は相似である。
2. 内角がそれぞれ等しい２つの三角形は相似である[*6]。
3. ３つの辺の長さの比がそれぞれ等しい２つの三角形は相似である。
4. 以上はすべて逆も成り立つ。

問 3.29. $\triangle ABC$ の辺 AB の中点を M、辺 AC の中点を N とし、BN と CM の交点を G とする。このとき $BG : GN = CG : GM = 2 : 1$ を示せ。

問 3.30. （三角形の重心）
上の問題の結果を使って、三角形の各頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ直線（合計３本ある）が１点で交わることを示せ。この交点をその三角形の重心と呼ぶ。

問 3.31. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ とし、$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ の面積をそれぞれ S, S' とするとき、$S : S' = AB^2 : A'B'^2 = BC^2 : B'C'^2 = CA^2 : C'A'^2$。これを示せ。

3.4.5 三平方の定理

定理 3.32. 三平方の定理
直角三角形の斜辺の長さの平方は他の２辺それぞれの長さの平方の和に等しい。

注：この定理は古代ギリシャのピタゴラスによって発見されたとされる。そのため別名ピタゴラスの定理とも呼ばれる。この定理は平面幾何学の基本定理といってよい。

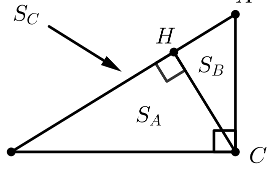

図 17

証明：$\triangle ABC$ を $\angle ACB = 90°$ の直角三角形として、頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を H とする。このとき $\angle ACB = 90° = \angle CHB$ であり、$\angle ABC = \angle CBH$。よって $\triangle ABC \backsim \triangle CBH$。同様にして $\triangle ABC \backsim \triangle ACH$。よって $\triangle ABC,\ \triangle CBH,\ \triangle ACH$ の面積をそれぞれ $S_C,\ S_A,\ S_B$ とすると、$S_C : S_A : S_B = AB^2 : CB^2 : AC^2$。一方 $S_C = S_A + S_B$ だから、$AB^2 = CB^2 + AC^2$ である。

[*6] ２つの内角がそれぞれ一致すれば、残りの内角は当然一致する。従って２つの内角が一致すれば相似である。

3.4.6 ヘロンの公式

合同条件に注意すれば、三角形の面積は２辺の長さとその間の角、１辺の長さとその両端の角、３つの辺の長さのいずれかが決まれば決定できることになる。前２者については三角関数が必要になるが、最後のものについては四則演算と平方根のみで計算できる。

定理 3.33. ヘロンの公式
三角形の３辺の長さを a, b, c とするとき、その三角形の面積は $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ として、$\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$ で与えられる。

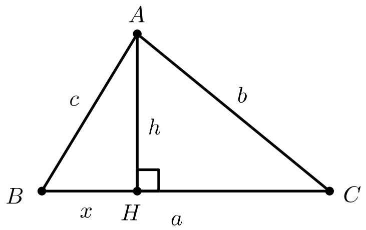

図 18

証明：$\triangle ABC$ で $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ とする。頂点 A から底辺 BC に下した垂線の足を H として、$AH = h,\ BH = x$ とする。三平方の定理より次の連立方程式が成り立つので、これを解く。

$$\begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 & \cdots (1) \\ b^2 - \left(a-x\right)^2 = h^2 & \cdots (2) \end{cases}$$

まず $c^2 - x^2 = b^2 - \left(a-x\right)^2$ から x を求めよう。展開して整理するとうまい具合に x^2 の項が消えて、$x = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$ と解ける。よって (1) より $h^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2$。よって面積を S とすると、$S^2 = \dfrac{1}{4}a^2h^2 = \dfrac{1}{4}a^2\left(c^2 - \left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2\right)$。これを整理する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2\left(c^2 - \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2\right) &= \frac{1}{16}\left(4a^2c^2 - \left(c^2-b^2+a^2\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2ac+c^2-b^2+a^2\right)\left(2ac-c^2+b^2-a^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\left(a+c\right)^2-b^2\right)\left(b^2-\left(a-c\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(-a+b+c\right) \\ &= s\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-a\right) \\ &= s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right) \end{aligned}$$

ここで三角形の２辺の長さ和は他の１辺の長さより大きいので、$s - a = \dfrac{-a+b+c}{2} > 0$ 等に注意すれば、$s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right) > 0$。よって $S = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$ である。

4 円に関する定理

4.1 円の接線

円について述べるには、接線ということを説明しなくてはならない。C を曲線、P を C 上の固定点、Q を C 上の動点とし、PQ を通る直線を l_Q として、C 上で Q を P に限りなく近づける。このとき直線 l があって、l_Q が l に限りなく近づくとき、直線 l を C 上の点 P における曲線 C の接線と呼ぶ。Q は P の両側から P に近づけることができる。その際、どちらから限りなく近づけても l_Q は l に限りなく近づかなくてはならない。ところでここまで「曲線」とか「限りなく近づく」とかといった表現を安易に使ってきたが、いったい曲線とは何だろうか？また限りなく近づくとは何だろうか？
微分学でいうところの滑らかな曲線というものが、通常我々が直感的にイメージする曲線に最も近い。一般的な定義における曲線（C^0 級曲線）には折れ線も含まれるし、平面を埋め尽くすような奇妙なものまで含まれ、直感的な曲線のイメージからは程遠い。また「限りなく近づく」という表現も、その正確な定義には、実数に関する抽象的な議論が不可欠であり、いずれにしてもここでやっているような「紙の上に描かれた図に対する直感」に大きく依存した、「初等平面幾何」の範疇を超えている。そこでここでは円の接線を以下のように定義する。この定義による円の接線が、初めに述べた一般的な定義による接線と一致することはいうまでもない。

定義 4.1. 円の接線
O を円、P を O の円周上の点とする。P を通り OP に垂直な直線を O の P における接線という。単に直線 l が円 O の接線とは、適当な O の円周上の点 P があって、l が O の P における接線となっていることをいう。

注意：円 O というときには、点 O を中心点とする円を意味する。同一の点を中心とする異なる半径の円を表現するときには、その同一の点に例えば $O_1, O_2 \ldots$ のように異なる名前をつければよい。また円という言葉は、円板の意味にも円周の意味にも使う。どちらの意味であるかは、その前後の文脈で理解することになる。もちろん明確に表現する必要があるときには、円板とか円周とかの表現を使えばよい。

定理 4.2. O を円、P を O の円周上の点とする。O の P における接線は唯一つであり、それは O の円周と P でのみ交わる（接する）。

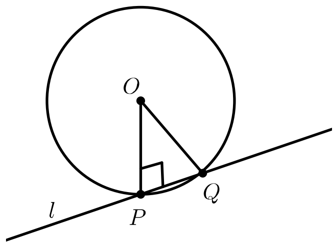

図 19

証明：
前半は定義より明らかである。後半を示す。
O の P における接線を l として、l が O の円周と P 以外の点 Q で交わったとする。OP と OQ は円 O の半径であるから、$\triangle OPQ$ は二等辺三角形であり、$\angle OPQ = \angle OQP$ であるが、$\angle OPQ = 90^\circ$ かつ $\angle POQ > 0$

より、$\triangle OPQ$ の内角の和が 180° を超えてしまうことになり、矛盾である。

問 4.3. 上記の定理を三平方の定理を利用して証明せよ。

問 4.4. 上記の定理で「それは O の円周と P でのみ交わる。」とあるところを「接線と円板 O との共有点は P のみである。」としても正しい。これを示せ。

4.2 円周角についての定理

O を円、P, Q を O の円周上の点とする。線分 PQ を（P, Q を端点とする）円 O の弦といい、P, Q を端点とするその円周の一部を（P, Q を端点とする）円 O の弧という。ここで弦はその両端点から一意的に定まるが、弧の方は同じ両端点に関して 2 つある。これを区別するために、以下では弧 PQ という表現は、P から Q へ左回りに進むときの円周の一部の意味であるとする。このようにすれば、表現「弧 PQ」と「弧 QP」によって二つの弧が区別される。$\angle POQ$（OP から OQ へ左回りに測る）を、弧 PQ に対する中心角と呼ぶ。また R を弧 QP 上の点として、$\angle PRQ$（RP から RQ へ左回りに測る）を、弧 PQ に対する円周角と呼ぶ。

定理 4.5. O を円、P, Q を O の円周上の点とする。弧 PQ に対する円周角は弧 PQ に対する中心角の $\dfrac{1}{2}$ である。

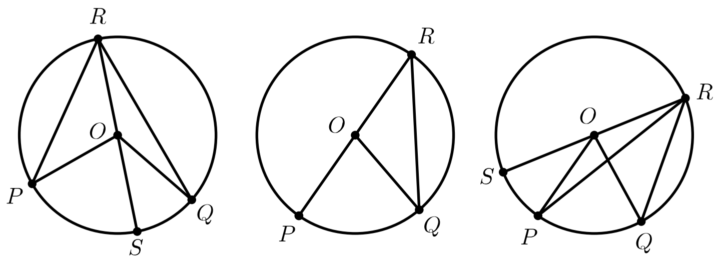

図 20

証明：本質的に上の図のように 3 通りの場合がある。最初のものについて示し、残りは演習とする。
線分 RO の延長が弧 PQ と交わる点を S とする。$\triangle OPR$ は $OP = OR$ の二等辺三角形だから、$\angle ORP = \alpha$ とするとき、$\angle OPR = \alpha$。よって $\angle POR = 180^\circ - 2\alpha$。よって $\angle POS = 2\alpha$。同様にして $\angle ORQ = \beta$ とするとき、$\angle QOS = 2\beta$。よって $\angle PRQ = \alpha + \beta,\ \angle POQ = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$ より $\angle PRQ = \dfrac{1}{2}\angle POQ$ が分かった。

問 4.6. 他の 2 つの場合を証明し、上記の定理の証明を完成せよ。

この定理から以下の二つのことが直ちに分かる。

系 4.7. （円周角不変の定理）
一つの円における同じ長さの弧に対する円周角は不変である。特に一つの弧に対する円周角は不変である。

系 4.8. 弧 PQ に対する円周角と弧 QP に対する円周角との和は 180° である。

系 4.9. 直径に対する円周角は直角である。逆に円周角が直角ならば、その弧の両端の点は直径対点である。

注意：円周上の２点を結ぶ直線がその円の中心を通るとき、それらの２点を直径対点いう。また、直径に対する円周角とは、その両端が直径対点になっている弧に対する円周角という意味である。

問 4.10. 与えられた円外の１点からその円（中心と円周がそれぞれ与えられている）への接線を、定規とコンパスのみを使って引く方法を考えよ。但し定規は点と点を結ぶ直線を引くためのみに使い、長さを測ることはできないとする。

問 4.11. O を円、P を円 O の外の点とする。P から O へは２本の接線が引ける。それぞれの接点を Q_1, Q_2 とするとき、$PQ_1 = PQ_2$ であることを示せ。

問 4.12. O_1, O_2 を２つの異なる円とする。ある直線が O_1 の接線であると同時に O_2 の接線でもあるとき、その直線は O_1, O_2 の共通接線であるという。次は共通接線の作図法を述べたものである。このやり方でなぜ共通接線が引けるか説明せよ。（ヒント：P から O_1 および O_2 へ接線を引き、それらが一致することを言え。Q についても同様。）また実際に作図してみよ。

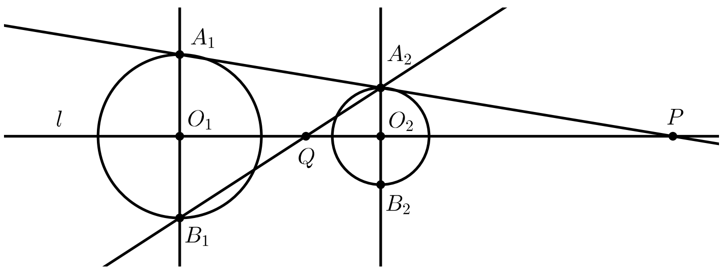

図 21

1. O_1, O_2 を通る直線 l を引く。
2. O_1 を通り l に垂直な直線と O_1 との交点（２つある）を A_1, B_1 とする。
3. O_2 を通り l に垂直な直線と O_2 との交点（２つある）を A_2, B_2 とする。
4. A_1, A_2 を通る直線と l との交点を P とする（注)。
5. B_1, A_2 を通る直線と l との交点を Q とする（注)。
6. P から O_1 または O_2 へ接線を引くと、これが共通接線になる（注)。
7. 同様に Q から O_1 または O_2 へ接線を引くと、これが共通接線になる（注)。

注：ここでは A_1, A_2 および B_1, B_2 が、それぞれ l に関して同じ側にあるものとしている。もし A_1, A_2 を通る直線が l と平行になったら、その直線自身が共通接線である。また、Q が円 O_1 または O_2 の内部にあるときは 6. までとする。

問 4.13. ２つの異なる円の共通接線は、まったく無いか、１本のみか、ちょうど２本あるか、ちょうど３本あるか、ちょうど４本あるかのいずれかである。それぞれどのような場合か考えよ。

定理 4.14. （接弦定理）
下の図で P, Q, R は円 O 上の点、XY は Q における O の接線とする。このとき $\angle PQX$ は弧 PQ に対する円周角に等しい。つまり $\angle PQX = \angle PRQ$ である。

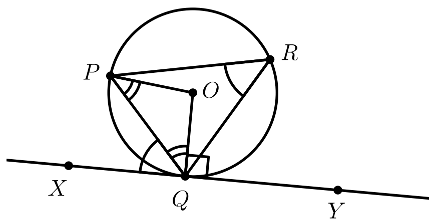

図 22

証明：$OP = OQ$ より $\angle OPQ = \angle OQP$ であるからこれを α とすると、$\angle POQ = 180° - 2\alpha$。よって $\angle PRQ = 90° - \alpha$。一方 $OQ \perp XY$ より $\angle PQX = 90° - \alpha$。よって $\angle PQX = \angle PRQ$ である。

問 4.15. 系 4.9 を利用して接弦定理を示せ。また接弦定理は、初めに述べた一般的な接線の定義からも証明できる。それについて考えよ。

定理 4.16. O を円、P, Q を O の円周上の点とする。平面は PQ を通る直線で 2 分されるが、このうち弧 PQ を含まない方の半平面を H とする。R を直線 PQ 上を除く H 上の点とするとき、$\angle PRQ$（RP から RQ へ左回りに測る）が弧 PQ の円周角と（その大きさが）一致するのは、R が弧 QP 上にあるときに限られる。

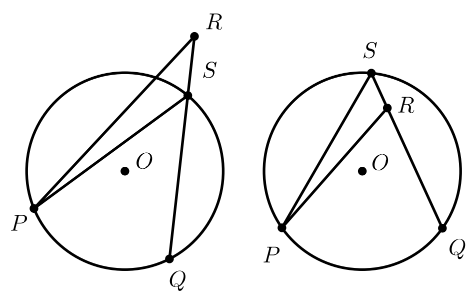

図 23

証明：QR を通る直線と弧 QP との交点を S とする。R が円 O の外部にある場合は、$\angle PSQ = \angle PRQ + \angle SPR$ より $\angle PRQ < \angle PSQ$。また R が円 O の内部にある場合は、$\angle PRQ = \angle PSQ + \angle RPS$ より $\angle PRQ > \angle PSQ$。よって示された。

系 4.17. 四角形が円に内接するとき、その向かい合う 2 つ角の和は 180° である。逆に向かい合う 2 つの角の和が 180° である四角形は円に内接する。

問 4.18. 上記の系を証明せよ。

定理 4.19. （方ベキの定理）
下の図で、A, B と C, D はそれぞれ点 P を通る 2 直線と円 O が交わる点である。このとき $PA \times PB = PC \times PD$ が成り立つ。

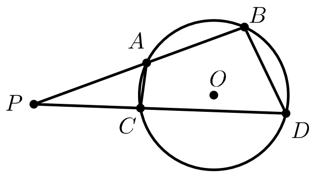

図 24

証明：$\angle PAC = 180^\circ - \angle CAB = \angle PDB$。また $\angle APC$ は共通だから $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$。よって $PA : PC = PD : PB$。よって $PA \times PB = PC \times PD$ である。

問 4.20. 上記の定理は P が円 O の内部にある場合や、$A = B$ つまり PA が O に接する場合にも成り立つ。これを示せ。
注意：$A = B$ かつ $C = D$ の場合は問 4.11 により正しい。$A = C$ の場合は明白に正しい。

4.3 正弦定理

4.3.1 三角比

相似条件により、直角三角形の 2 辺の長さの比は、その直角三角形の直角以外の 1 つの内角が決まれば決定する。そこで $\triangle ABC$ を $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形とし、$\angle ABC = \theta$ とするとき、以下のようにして正弦、余弦、正接を定義する。

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB} \text{ (正弦：サイン)}$$
$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} \text{ (余弦：コサイン)}$$
$$\tan\theta = \frac{AC}{BC} \text{ (正接：タンジェント)}$$

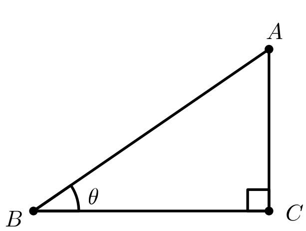

図 25

4.3.2　正弦定理

定理 4.21.（正弦定理）

下の図で O は $\triangle ABC$ の外接円、BD は直径とする。$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ とし、$\angle BAC$ の大きさを単に A で表す。その他の角も同様に、$\angle ABC = B,\ \angle BCA = C$ と表示する。また O の半径の長さを R とする。このとき次の関係が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

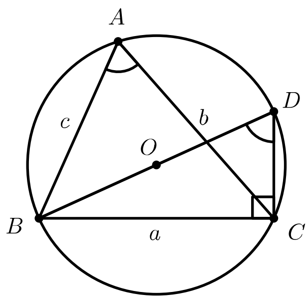

図 26

証明: 円周角は変わらないから、$\angle BDC = \angle BAC = A$。ゆえに直角三角形 BDC に注目して、$\sin A = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$。よって $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$。他も同様だから $\dfrac{b}{\sin B} = 2R,\ \dfrac{c}{\sin C} = 2R$。よって $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ である。