平成２１年７月２日（改訂 ver1.1）　八起数学塾

グラムの行列

$\mathbb{C}$ を複素数体とする。以下、$\mathbb{C}$ を基礎体として話を進める。またベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のエルミート積を $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ であらわす。なお、以下の議論は基礎体を実数体に取って、実計量線型空間で考えても全く同じである。

1　グラム行列の定義

A を n 次正方行列とし、その随伴行列を A^* であらわす。つまり $A^* = {}^t\overline{A}$ である。A^*A を A のグラム行列と呼ぶ。なお、$A^*A = {}^tA\overline{A}$ であることに注意せよ、A の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とすると、$A^*A = ((\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j))$ である。

2　グラム行列の性質

A のグラム行列を G とすると G は半正値エルミート行列であり、以下は同値である。

1. A は正則行列
2. $\mathrm{det}G \neq 0$
3. G は正値エルミート行列

証明. $G^* = (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A = G$ だから G はエルミートである。
また、$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(G\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) \geqq 0$ だから半正値である。
A が正則であることと $\mathrm{det}A \neq 0$ とは同値であり、
$\mathrm{det}G = \mathrm{det}(A^*A) = (\mathrm{det}A^*)(\mathrm{det}A) = (\mathrm{det}\,{}^t\overline{A})(\mathrm{det}A) = (\overline{\mathrm{det}\,{}^tA})(\mathrm{det}A) = (\overline{\mathrm{det}A})(\mathrm{det}A) = |\mathrm{det}A|^2$
だから、A が正則であることと $\mathrm{det}G \neq 0$ は同値である。
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x} \neq 0$ とする。A が正則であれば $A\boldsymbol{x} \neq 0$ だから $(G\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) > 0$
よって G は正値である。
A が正則でなければ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する。
この $\boldsymbol{x}$ に対して $(G\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) = 0$ であるから G は正値ではない。

□

3　グラム行列の拡張

V を複素計量線型空間、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in V$ とする。このとき n 次正方行列 $((\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j))$ をグラム行列と呼ぶ。

グラム行列は半正値エルミート行列であり、以下は同値である。

1. $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ は線型独立
2. $\mathrm{det}((\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j)) \neq 0$
3. $((\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j))$ は正値エルミート行列

証明. $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ が生成する V の線型部分空間を W とする。W の次元は n 以下、従って特に有限である。$\mathrm{dim}W = m$ と置く。シュミットの直交化法から分るように、W は正規直交基底を持つ。その正規直交基底 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_m}$ を 1 つ選んで固定する。$\boldsymbol{x} \in W$ をこの基底で $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{e_i}$ とあらわして、

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ とすれば、線型写像 $f : W \to \mathbb{C}^n$ が定義され、

f は単射かつ $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(f(\boldsymbol{x})|f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ となることが容易に分る。

$((\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j))$ が正方行列 $A = (f(\boldsymbol{a_1}) \ldots \quad f(\boldsymbol{a_n}))$ のグラム行列に一致することに注意せよ。

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ が線型独立であること、f が計量同型であること、A が正則であることがすべて同値であることも容易に分るから、あとは前節の結果を使えば良い。

$\square$

4 線型独立性の判定

前節の結果により、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ の線型独立性を判定するには、そのグラム行列の行列式を計算すればよいことがわかる。この節ではこれについて別証を与える。

$$\boldsymbol{x} \in W \text{ に対して } g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}_1) \\ (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}_2) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}$$ とすれば、線型写像 $f : W \to \mathbb{C}^n$ が定義される。

行列 $(g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}) \ldots \quad g(\boldsymbol{a_n}))$ がグラム行列 G の転置行列になっていることに注意せよ。

次の条件は同値である。

1. $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ は線型独立
2. $\mathrm{det}G \neq 0$
3. g は同型写像

証明. $\mathrm{det}G = \det(g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}) \ldots \quad g(\boldsymbol{a_n}))$ だから 2. は $\det(g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}) \ldots \quad g(\boldsymbol{a_n})) \neq 0$ と言い換えてよい。

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ が線型従属であるとすれば、例えば $\boldsymbol{a_1}$ は他の $\boldsymbol{a_i}$（$i \neq 1$）の線型結合であらわされるから、g の線型性と、行列式の性質から、$\det(g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}) \ldots \quad g(\boldsymbol{a_n})) = 0$ である。

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ が線型独立であるとして、g が同型であることを示す。

$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とすると $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}_i) = 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）である。

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ は W を生成するから、$\exists \alpha_i \in \mathbb{C}$ で $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a_i}$ となる。よって $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}_i) = 0$
従ってエルミート積の性質から $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ がわかるので、g は単射である。

仮定から $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ は線型独立だから、$g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}), \ldots, g(\boldsymbol{a_n})$ も線型独立であり、次元を考えれば、g が同型であることが分った。

また今のことから、$\det(g(\boldsymbol{a_1}), g(\boldsymbol{a_2}) \ldots \quad g(\boldsymbol{a_n})) \neq 0$ も分った。

最後に g が同型写像であるとすると、$\dim W = \dim \mathbb{C}^n = n$ で、W は $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ から生成されるので、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ は線型独立である。

□