平成２１年5月１３日　八起数学塾

虚数について

1　虚数について

まず、ときおり耳にする次の質問を考える。
質問：「虚数は存在するか」

一方これに対して、「実数は存在するか」という質問はまず聴かない。しかしピタゴラス学派にとっては有理数のみが数であり、無理数などというものはあってはならないとされていたらしい（例えば遠山啓著岩波新書数学入門上巻１８２ページ参照)。三平方の定理を証明しておきながら、皮肉な話である。

今ではたいていの人が実数はあると思っている。しかし「ある」とはどういう意味なのだろうか。鉛筆が「ある」という場合、その鉛筆を持ってくることが可能である。一方「１がある」といっても、１本の鉛筆や、１個のみかんなら持ってこれるが、「１」そのものを持ってくることはできない。さらに１の場合は「１本の鉛筆」や、「１個のみかん」といった具体的な事象と対応しているが、「$\sqrt{2}$」はどうだろう。空間や時間が連続的なら、単位の長さや時間を決めれば、それの $\sqrt{2}$ 倍の長さや時間は実在かもしれないが、これはあくまでも空間や時間が連続的であることが前提である。もしそうでなかったら「$\sqrt{2}$」は消えてなくなるのだろうか。また数学ではいくらでも大きな整数を考えることができるが、もし宇宙が有限であったらある大きさ以上の整数は存在できなくなるのだろうか。

数は概念であり、実在の物や事象ではない。「１」が具体的な事象と対応付けられるからといって、それゆえに「１がある」というのは正しくない。概念は対応する具体的な物や事象がなくても存在できるし、仮に対応する具体的な物や事象がある場合も、その概念とそれに対応する具体的な物や事象とは別ものである。

概念に対しても「ある」とか「存在する」とかの言葉を使うが、これは実在の物や事象が「ある」とか「存在する」とかいうのとは違う意味の言葉である。後者は物理的世界の存在の意味であり、前者は想定の世界での存在の意味である。そして繰り返しになるが、想定の世界の存在は物理的世界の存在に裏打ちされる必要がない。この意味において「$\sqrt{2}$」は存在するし、いくらでも大きな整数を考えることも許されるのである。

以上からわかるように、「虚数は存在するか」という質問を、物理的な世界での存在を問う質問と解釈するのなら存在しないというのがその答えである。またもし、「対応する物理的な物や事象があるか」という意味に取るのなら、なんともいいがたい。電気で交流を扱うときにインピーダンスというものを考え、これは複素数で表される。しかしインピーダンスは複素数の応用として導入されたのであり、これを複素数に対応する物理的な事象であるとするのには無理があるだろう。

虚数は数であり、数は概念なのだから、「虚数は存在するか」は「虚数は概念として存在するか」と解釈すべきである。しかし「概念として存在するか」という言葉でもまだあいまいである。これを「矛盾なく想定できるか」とすればかなり明瞭になる。

「虚数は矛盾なく想定できるか」このように問われれば答えは yes である。そして「１」にせよ「実数」にせよ「矛盾なく想定できる」という意味で「存在する」のである。

つまり**数を初めとする数学の概念については、それが矛盾なく想定できれば良く、実在との対応について思い煩う必要はない。**そして逆説的だが、それだからこそ、何にでも応用ができるのである。例えばもし「１」が個数と分かちがたく結びついているとするならば、「１グラム」という場合に１が使えなくなる。なぜなら重さは個数ではないから。もし微分が速度と分かちがたく結びついているのなら、加速度にも経済学にも微分

は使えない。しかしそんなことはない。

従って、「虚数は存在するか」という質問に対して残る問題は、虚数を想定しても矛盾が生じないことをどのようにして確かめるかということである。そしてこれは以下のようにして確かめられる。

1. 集合論と呼ばれる体系を作る
2. 集合論が矛盾しないことを確かめる
3. 集合論の枠の中に虚数を含む数の体系を作る

ここで「集合論の枠の中に体系を作る」とは集合論の言葉と集合論が許容する操作を使って体系を作るということであり、もしその体系が矛盾を引き起こすのならば、もとの集合論が矛盾することになるので、２．が確かめられている限り、集合論の枠の中で作られた体系は矛盾を含まないことになる。

いうまでもなく１．と２．は容易なことではないから、ここでは１．と２．を前提とし、さらに実数（以下 $\mathbb{R}$ で表す）までが集合論の枠の中に構築されているものとして、この $\mathbb{R}$ を利用して複素数（従って虚数も）を作ってみる。なおここでは集合の記号を説明なしに使う。

まず実数 a, b のペア (a, b) 全体の集合 $\{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ を考えてこれを $\mathbb{C}$ と置く（つまり $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$ とする)。次いでこの $\mathbb{C}$ の元に対して以下のように四則演算を定義する。(注意：ペアを作るとかこれらのペアに四則演算を定義するとかは全て集合論の中で許されている操作である)。

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$(a, b) \div (c, d) = ((ac + bd)/(c^2 + d^2), (-ad + bc)/(c^2 + d^2)) \qquad \text{但し } (c, d) \neq (0, 0) \text{ とする。}$$

ここで $\mathbb{C}$ の部分集合 $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ を考える。実数 x に $(x, 0)$ を対応させることで、この部分集合は四則演算に関して $\mathbb{R}$ と全く同じ構造になっている。例えば足し算について調べると、$a + b$ には $(a + b, 0)$ が対応するべきだが、$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ なのでそのようになっている。同様に引き算、掛け算、割り算についても確かめられる。(なお、引き算や割り算の代わりに加法逆元と乗法逆元の概念を考えるほうがいいが、ここの説明の本質とは関係ない概念を付け加えるのを避けるために上記のようにしてある)。
そこで初めに与えられた $\mathbb{R}$ の代わりに $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ を改めて実数の集合であると考える事にする。ここで次の計算に注目すると

$$(0, 1) \times (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

$(-1, 0)$ は -1 の事だから、$(0, 1)$ を i だと思えば $i \times i = -1$ であることがわかる。更に (a, b) を $a + bi$ と書けば通常の記号法の複素数の世界が得られる事もわかる。

以上により矛盾のない実数と矛盾のない集合論が許容する操作によって複素数が作られたので、複素数も矛盾しないことがわかった。

2　負の数の掛け算について

質問:「なぜ $-1 \times -1 = +1$ なのか？」

結論を先にえば $-1 \times -1 = -1$ とか $-1 \times -1 = 0$ とかとしても別にかまわないが、このような約束は良い約束ではない。一方それに対して $-1 \times -1 = +1$ は良い約束だということである。

$a \times n$ と言う掛け算は、n が正の整数（特に 2 以上）なら a を n 回加えることといって良い。しかし n がそうでない場合にはそのように考えるわけにはいかない。上記の「虚数は存在するか」で説明したように、数だけでなく数学の概念はすべて矛盾のない約束事である。従って正の整数 n について $a \times n$ が定義されていてもそうでない n について $a \times n$ が何を意味するかは決めてやらない限りどうにもならない。しかしもちろん矛盾を起こすような決め方はできないし、さらに矛盾を起こさないからといってどんな決め方でもいいともいえない。無意味な約束をしてもしょうがないからである。

ここで正の整数に関して掛け算（と足し算）を調べてみると次のような性質があることが分かる。（以下わずらわしいので $\times$ と言う記号は必要のない限りやめて、普通の文字式の表現もしくは $\cdot$ を使う。）

$$\begin{aligned} mn &= nm && \text{交換法則} \\ a(mn) &= (am)n && \text{結合法則} \\ (a+b)n &= an+bn && \text{分配法則} \\ a(m+n) &= am+an && \text{分配法則} \end{aligned}$$

そこでこの法則を保つように掛け算を拡張する。
例えば $a \cdot \frac{1}{2}$ を考える。（もちろんこれは何らかの数になるものとして定義するのである。）それを α と置く（つまり $a \cdot \frac{1}{2} = \alpha$ と置く）さて $a = a \cdot 1 = a \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ だが、有理数に対しても分配法則が成り立つように定義を拡張するのだから、ここで拡張された分配法則を使えば $= a \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{1}{2} = \alpha + \alpha$ 結局 $a = \alpha + \alpha$ が得られ、$\alpha = \frac{a}{2}$ つまり $a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ とするべきであることがわかる。同様にすれば $a\times$ 有理数をどのように定義するべきかも分かる。なお、$a\times$ 実数については完備化等の概念が必要なので割愛する。

本題である -1×-1 について考える。まず $a \cdot 1 = a \cdot (1+0) = a \cdot 1 + a \cdot 0$ から $a \cdot 0 = 0$ であるべきことが分かる。すると $0 = -1 \times 0 = -1 \times (1 + (-1)) = -1 \times 1 + (-1) \times (-1) = -1 + (-1) \times (-1)$ なので、分配法則が成り立つように掛け算を拡張するためには $-1 \times -1 = +1$ としなくてはならないということがわかった。

つまりもし $-1 \times -1 = -1$ や $-1 \times -1 = 0$ のようにすると、このような良い計算規則をあきらめなくてはならないのである。