平成２１年１０月２日　八起数学塾（令和元年６月９日訂正）

ジョルダンの標準形

以下 K を体とし、線型空間は K 上有限次とする。スカラーは通常の太さの文字で表し、ベクトルは太字で表す。特に 0 はスカラーの零、太字の $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す。特に断らない限り「行列」は正方行列を意味する。E は単位行列を、O は零行列を表す。また、I は恒等変換を、太字の $\boldsymbol{O}$ は零変換を表す。また、対象とする線型変換及び行列の固有多項式は K 上で一次因子に分解するものとする。

1　用語と記号

この節では用語と記号についてまとめる。

1.1　固有多項式

行列 A の固有多項式 $\det(xE-A)$ を $\Phi_A(x)$ で表す。

1.2　行列の相似

行列 A と B が相似であるとは、$B=P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P が存在することをいう。A と B が相似であることを記号で $A\sim B$ で表す。相似が同値関係であることは明らかである。

1.3　直和

V を線型空間、W_1, W_2 をその部分空間とする。W_1+W_2 が直和であるとき、つまり $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ であるときは、$W_1\oplus W_2$ と書くことにする。

同様に V の部分空間 W_i $(1\leqq i\leqq m)$ に対して $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}W_i$ が直和であるとき、つまりすべての i $(1\leqq i\leqq m)$ に対して $W_i\cap(\displaystyle\sum_{j\neq i}W_j)=\{\mathbf{0}\}$ であるときは、$\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}W_i$ と書くことにする。

1.4　行列についての記法

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ を正方行列（サイズはそれぞれ異なって良い）とする。
これ等を対角線上に並べて得られる大きな行列

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \text{\huge 0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & A_m \end{pmatrix}$$

を $A_1, A_2, \ldots, A_m$ の直和と呼んで、$A_1\dot{+}A_2\dot{+}\ldots\dot{+}A_m$ で表す。

1.5 ジョルダン行列

k 次正方行列

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

（対角成分がすべて α で対角成分の右隣がすべて 1、その他はすべて 0）を固有値 α に対する k 次**ジョルダン細胞**と呼んで、$J(\alpha, k)$ で表す。

いくつか（一個も可）のジョルダン細胞の直和になっている行列を**ジョルダン行列**と呼ぶ。

1.6 制限

V をベクトル空間、W を V の線型部分空間（以後単に部分空間と呼ぶ)、T を V の線型変換とする。このとき T の W への制限を $T|W$ で表す。

1.7 Ker と Im

V をベクトル空間、T を V の線型変換とする。このとき $T(V)$ を $\mathrm{Im}\ T$ で、$\{x \in V | T(x) = 0\}$ を $\mathrm{Ker}\ T$ で表す。

$\mathrm{rank}\ T = \dim\ (\mathrm{Im}\ T)$、$\dim V = \dim\ (\mathrm{Ker}\ T) + \dim\ (\mathrm{Im}\ T)$ が成り立つ。

1.8 本資料で独自に用いる記号

これまでに述べたものはすべて一般的に用いられる記号（記法）である。
以下では本資料独自の記号（記法）を幾つか定める。一般性のない記号（記法）の多用は好ましくないが、後の説明を簡便化する都合上お許し願いたい。

V をベクトル空間、$\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{a_i}$ を V のベクトル、T を V のベキ零な線型変換（以下単にベキ零変換と呼ぶ）とする。

（1）$\mathrm{S}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n})$

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ が生成する V の線型部分空間を $\mathrm{S}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ で表す。

（2）$\mathrm{n}(T)$

$T^m = \boldsymbol{O}$ を満たす最小の正整数 m を $\mathrm{n}(T)$ で表す。

（3）$\mathrm{n}(T; \boldsymbol{a})$

$T^m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ を満たす最小の正整数 m を $\mathrm{n}(T; \boldsymbol{a})$ で表す。当然 $\mathrm{n}(T; \boldsymbol{a}) \leqq \mathrm{n}(T)$ である。

（4）$\mathrm{S}(T; \boldsymbol{a})$

$\mathrm{n}(T; \boldsymbol{a}) > 1$ の場合 $\mathrm{S}(\boldsymbol{a}, T(\boldsymbol{a}), T^2(\boldsymbol{a}), \dots, T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a}))$ を $\mathrm{S}(T; \boldsymbol{a})$ で表す。

$\mathrm{n}(T; \boldsymbol{a}) = 1$ の場合は $\mathrm{S}(T; \boldsymbol{a}) = \mathrm{S}(\boldsymbol{a})$ とする。

（5）T^0
T^0 は I であるとする（この記法はある程度一般性があるかもしれないが、確たる証拠もないので、念のためここに掲げておく）。
T はベキ零なので正則ではない。特に $O^0=I$ となることを考えると奇妙に思うかもしれないが、T が何であれ T^0 とは元の空間に何もしないことであると考えれば、$T^0=I$ は合理的である。
参考のため、集合論的なベキ乗の定義によれば（数に関して）$0^0=1$ であることを説明しておく。ただし本題とは関係ないので無理に読む必要はない。

■$0^0=1$ の説明：　集合 X の濃度を $\#X$ で表すとき、$\#B^{\#A}$ は A から B への写像全体の集合 B^A の濃度 $\#B^A$ として定義される。この定義によれば集合 B が何であれ $\#B^{\#\emptyset}=1$ であり、特に $\#\emptyset^{\#\emptyset}=1$、すなわち $0^0=1$ である。
通常の理解として写像 $A\to B$ とは、A の各元 $a\in A$ それぞれに B の元のいずれか一つを対応させる規則である。それゆえ空集合からの写像という考えには抵抗があるかもしれない。実際 A が空集合なら元を持たないから、対応のさせようがないではないかと考えるのはむしろ当然である。
しかしながら集合論において f が A から B への写像である、すなわち $f\in B^A$ は、$f\subset A\times B$ かつ任意の a に対して $a\in A$ ならば b がただ一つ存在して $b\in B$ かつ $(a,b)\in f$ であること、つまり論理式にすると

$$(f\subset A\times B)\wedge(\forall a\,(a\in A\to\exists!b\,(b\in B\wedge(a,b)\in f)))$$

であることとして定義される（始集合と終集合を加味して、このような $f\subset A\times B$ および A,B との組という形での定義もある）。よってここで $A=\emptyset$ であれば、「$a\in A$」という主張はいかなる a についても偽なので（「ならば」に関する真偽の規則によって）、「ならば」以下の部分の真偽にかかわらず上記条件の一番外側の $\wedge$ の後ろの部分は真である。またこの場合 $A\times B=\emptyset\times B=\emptyset$ だから、$f=\emptyset$ そしてそれのみが一番外側の $\wedge$ の前の部分の条件、したがってまた全体の条件を満たす。よって $\{\emptyset\}=B^{\emptyset}$ であり、$\emptyset:\emptyset\to B$ が $\emptyset$ から B への唯一の写像である。これは $B=\emptyset$ であっても変わらない。
つまり上記の定義に従えば空集合からの写像というものが存在するのである。なお当然のことだが、空集合を終集合とする写像は、その始集合空が集合である場合のみ存在する。
なお定義がおかしいので、空集合からの写像などというものが存在することになってしまうのではないかと考える人がいるかもしれない。その意見を尊重するなら、上記の条件に条件 $A\neq\emptyset$ を and 条件で付け加えればよい。しかしながらそのようにしないのは、そのようにしない方がむしろいろいろと都合がいい、もっと言えばそうしないといろいと不都合だからである[*1]。

■本題の続き：　以上で $0^0=1$ の説明を終わり、本題に戻る。
注１：$\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a})$ が T の不変部分空間になっていることは明らかである。
注２：$\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})>1$ とするとき、$\boldsymbol{a},T(\boldsymbol{a}),T^2(\boldsymbol{a}),\ldots,T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a})$ は線型独立である。なおこの場合 $T(\boldsymbol{a})\neq\boldsymbol{0}$ だから、$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ であることに注意せよ。
実際

$$\alpha_0\boldsymbol{a}+\alpha_1T(\boldsymbol{a})+\alpha_2T^2(\boldsymbol{a})+\cdots+\alpha_{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

[*1] 例えば一般に可換環の準同型 $A\to B$ と、アファインスキームの射 $\mathrm{Spec}B\to\mathrm{Spec}A$ との間に一対一の対応関係がある。B が零環の場合 $\mathrm{Spec}B=\emptyset$ であり、射 $\mathrm{Spec}B\to\mathrm{Spec}A$ の底空間の位相写像は $\emptyset\to\mathrm{Spec}A$ である。よってこれを認めないと、先の対応関係が例外を含んだすっきりしないものになる。スキームは圏の考えにしたがって論じられ、この場合単に不都合と言うよりむしろ致命的である。

と置いて両辺に $T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}$ を作用させれば $\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ を得るが、$T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$ なので $\alpha_0 = 0$ が分る。よって $\alpha_0 \boldsymbol{a}$ の項が消えて

$$\alpha_1 T(\boldsymbol{a}) + \alpha_2 T^2(\boldsymbol{a}) + \cdots + \alpha_{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1} T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

となる。これの両辺に $T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-2}$ を作用させれば今と同様に $\alpha_1 = 0$ が分る。以下同様の議論を繰り返せば $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a})-1} = 0$ が分る。

2　行列の対角化について

2.1　対角化の一意性

行列 A を対角化するとは、A と相似な対角行列を求めることに他ならない。相似な行列の固有多項式は同じなので、A が対角化可能である場合、その対角行列の対角成分は A の固有値であり、固有値 α がその対角成分に現れる回数（個数）は、固有多項式 $\Phi_A(x)$ の因数としての $x - \alpha$ の重複度に等しい。従って A と相似な対角行列はその対角成分の順序を除けば一意的に定まる。

2.2　対角化できない行列

対角化可能なベキ零行列は O のみである
これは $A \sim B$ なら $A^n \sim B^n$ であること、あるいは「行列がベキ零であることとその固有値がすべて 0 であることとは同値である」ことから明らかである。言い換えれば O 以外のベキ零行列は対角化できないことが分る。

上（下）三角行列で対角成分がすべて 0 であるようなものを考える。この行列の固有値は 0 のみなのでベキ零である。従って対角成分がすべて 0 であってしかも O でない上（下）三角行列（そんなものはいくらでもある）は対角化できない。

3　ベキ零行列の標準形

ベキ零行列は O でない限り対角化できない。それではベキ零行列は対角行列とは別の何か「良い形」の行列と相似にならないであろうか。次がその一つの答えである。

定理：
T を線型空間 V のベキ零変換とする。このとき適当な V の $\boldsymbol{0}$ でない元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が存在して

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{S}(T; \boldsymbol{a_i})$$

と表せる。

ここで 1.8 の注１、２に注意せよ。$\mathrm{S}(T; \boldsymbol{a_i})$ の基底 $< T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a}_i)-1}(\boldsymbol{a_i}), T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a}_i)-2}(\boldsymbol{a_i}), \ldots, T(\boldsymbol{a_i}), \boldsymbol{a_i} >$ に

関して $T|\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a_i})$ を行列で表せば、$\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i})$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。これは固有値 0 に対する $\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i})$ 次ジョルダン細胞 $J(0,\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i}))$ である[*2]。

基底 $< T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i})-1}(\boldsymbol{a_i}), T^{\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i})-2}(\boldsymbol{a_i}), \dots, T(\boldsymbol{a_i}), \boldsymbol{a_i} >$ をすべての i $(1 \leqq i \leqq m)$ に渡って集めれば V の基底が得られる。T をこの基底について表せばその行列は $J(0,\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_1})) \dot{+} J(0,\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_2})) \dot{+} \dots \dot{+} J(0,\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_m}))$ である。

つまり**ベキ零変換は適当な基底によって、$\boldsymbol{J(0,i)}$ の直和として行列表示できる**。

次にベキ零変換を、このような $J(0,i)$ の直和で行列表示した場合、その表し方はその順序を除いて一意的であることを示す。

まず

$$\mathrm{rank}\ (J(0,i)^k) = \begin{cases} i-k & (i \geqq k) \\ 0 & (i < k) \end{cases}$$

に注意する。これは計算すれば容易に確かめられる。また、$J(0,i)$ が標準基底をどのように変換するかを考えることからでも容易に分る。

一方ベキ零変換 T を $J(0,i)$ の直和で行列表示して、その表現を固定し、その中に現れる $J(0,i)$ の個数を $\mathrm{r}(i)$ と置くと

$$\mathrm{rank}\ (T^k) = \sum_i \mathrm{r}(i)\ \mathrm{rank}\ (J(0,i)^k)$$

なので、今の注意から

$$\mathrm{rank}\ (T^k) = \sum_{i>k} (i-k)\mathrm{r}(i)$$

従って

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\ (T^{k-1}) &= \mathrm{r}(k) + 2\mathrm{r}(k+1) + 3\mathrm{r}(k+2) + \cdots \\ \mathrm{rank}\ (T^{k}) &= \mathrm{r}(k+1) + 2\mathrm{r}(k+2) + 3\mathrm{r}(k+3) + \cdots \\ \mathrm{rank}\ (T^{k+1}) &= \mathrm{r}(k+2) + 2\mathrm{r}(k+3) + 3\mathrm{r}(k+4) + \cdots \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{r}(k) = \mathrm{rank}\ (T^{k-1}) - 2\ \mathrm{rank}\ (T^k) + \mathrm{rank}\ (T^{k+1})$$

これから T を $J(0,k)$ の直和で行列表示したときの $J(0,k)$ の個数はその基底の取り方によらず一定であることが分った。

すなわち **$\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{J(0,k)}$ の直和で行列表示する表し方は、その順序を除いて一意的である**。

[*2] $\mathrm{n}(T;\boldsymbol{a_i}) = 1$ の場合 $\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a_i})$ の基底は $< \boldsymbol{a_i} >$ であり、この基底で $T|\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a_i})$ を行列表示すると固有値 0 に対する 1 次ジョルダン細胞 $J(0,1) = (0)$ を得るが、以下すべてこの場合をも含めて考えるものとする。

4 上記 3 節の定理の証明

証明を二通り紹介する。初めのものは基底の「存在を示す」方法であり、二番目のものは基底を求めるアルゴリズムを与えるやり方である。

4.1 基底の存在を示す方法

V の次元に関する帰納法による。
$\dim V = 0$ のとき（つまり $V = \{\mathbf{0}\}$ のとき）は何も証明すべきことは無い。
$\dim V > 0$ として $\dim V - 1$ 以下では主張が正しいとする。

$T^{\mathrm{n}(T)-1} \neq \boldsymbol{O}$ だから $T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$ を満たす $\boldsymbol{a} \in V$ が存在する[*3]。この $\boldsymbol{a}$ に対して $V = \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ を満たす T 不変な V の部分空間 W が存在することを示す。これが示されれば $\dim W < \dim V$ なので、後は W と $T|W$ に帰納法の仮定を適用して証明が完了する。

T 不変な V の部分空間のうち $\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a})$ との共通部分空間が $\{\mathbf{0}\}$ であるものを考える。
$\{\mathbf{0}\}$ はこの性質を満たすので、このようなものは存在する。そこでこのような部分空間の内でその次元が最大のもの（の一つ）を W とすればこれが求めるものである。

仮に $V \neq \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ とすると W の次元の最大性に矛盾することを示せばよい。そのためにこの仮定の下で次の条件を満たす $\boldsymbol{y} \in V$ の存在を示す。

1. $T(\boldsymbol{y}) \in W$
2. $\boldsymbol{y} \notin \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$

このような $\boldsymbol{y} \in V$ の存在を示せたとすると、1. より $W + \mathrm{S}(\boldsymbol{y})$ が T 不変であることが分り、さらに 2. と後述の 4.2.1（１）、（２）、（３）から直和 $\mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus (W \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{y}))$ を得る。ここで再び 2. によって $\dim W < \dim\,(W \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{y}))$ が分るので、先に述べた $W + \mathrm{S}(\boldsymbol{y})$ の T 不変性と併せて W の次元の最大性に矛盾することが分る。

$V \neq \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ とすると $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ となる $\boldsymbol{x} \in V$ が存在する。$T^0(\boldsymbol{x}) = I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \notin \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ かつ $T^{\mathrm{n}(T)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ なので、$T^m(\boldsymbol{x}) \notin \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ かつ $T^{m+1}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ を満たす非負整数 m が存在する。
$T^{m+1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \geqq 0} \alpha_i T^i(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{w} \quad (\alpha_i \in K, \boldsymbol{w} \in W)$ と書けることに注意して、この両辺に $T^{\mathrm{n}(T)-1}$ を作用させると $\mathbf{0} = \alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) + T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{w})$ よって $\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) = -T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{w}) = T^{\mathrm{n}(T)-1}(-\boldsymbol{w})$ を得るが、$-\boldsymbol{w} \in W$ で W は T 不変だから $\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) \in W$ である。そしてもちろん $\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a})$ であるから、$\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \cap W = \{\mathbf{0}\}$ となって $\alpha_0 T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ が分る。ところが $T^{\mathrm{n}(T)-1}(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$ だから $\alpha_0 = 0$ である。よって先に記述した $T^{m+1}(\boldsymbol{x})$ を表す式の右辺から $\alpha_0 T^0(\boldsymbol{a})$ の項が消え去って、$T^{m+1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \geqq 1} \alpha_i T^i(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{w} \quad (\alpha_i \in K, \boldsymbol{w} \in W)$ となる。そこで $\boldsymbol{y} = T^m(\boldsymbol{x}) - \sum_{i \geqq 1} \alpha_i T^{i-1}(\boldsymbol{a})$ と置くと $T(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{w} \in W$ である。一方仮に $\boldsymbol{y} \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ とすると $T^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} + \sum_{i \geqq 1} \alpha_i T^{i-1}(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ となって m の取り方に矛盾するので $\boldsymbol{y} \notin \mathrm{S}(T;\boldsymbol{a}) \oplus W$ である。よって所望の $\boldsymbol{y} \in V$ が得られた。

[*3] この $\boldsymbol{a}$ の取り方がこの証明のポイントである。

証明終わり。

4.2　基底を求めるアルゴリズムを与える方法

　この証明は本質的には単純だが、アルゴリズムを与えるという性格上煩雑になる。また手続きに関しての説明が主体なので、その手続きを支える論理の正当性がやや見えにくくなるかと思われるので、事前にこの点を明確にしておく。

4.2.1　準備

　V を線型空間、W, W_1, W_2, W_3 を V の部分空間、T を V の線型変換、m を正整数とする。
以下が成り立つ。
（1）$W_1 \oplus W_2 = W_2 \oplus W_1$
（2）$W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3) = (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$
（3）$\boldsymbol{a} \in V$ かつ $\boldsymbol{a} \notin W$ ならば、$\mathrm{S}(\boldsymbol{a}) + W$ は直和である。
（4）$T(\mathrm{S}(\boldsymbol{a})) = \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}))$
（5）$T(W_1 + W_2) = T(W_1) + T(W_2)$
（5）' $W \cap \mathrm{Ker}T^m = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば $T\left(W\right) \cap \mathrm{Ker}T^{m-1} = \{\boldsymbol{0}\}$ である。
（5）'' $(W_1 \oplus W_2) \cap \mathrm{Ker}T^m = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば $T\left(W_1\right) \cap T\left(W_2\right) = \{\boldsymbol{0}\}$ である。
（6）$T(\mathrm{Ker}\ T^m) \subset \mathrm{Ker}\ T^{m-1}$
（7）$W \neq V$ の場合適当な V の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ によって $V = \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_k) \oplus W$ と書ける。

　証明：
（1）明白である
（2）$W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$ は明白。（1）を考慮すれば $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $W_2 \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ から $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $(W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ を導けば十分である。
まず $\boldsymbol{0} \in W_1 \cap W_2 \subset W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ より $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$。
次に $\boldsymbol{x} \in (W_1 + W_2) \cap W_3$ とすると、$\exists \boldsymbol{x_1} \in W_1, \exists \boldsymbol{x_2} \in W_2$ で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x_2}$ と書ける。
さらに $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \in W_3$ だから $\exists \boldsymbol{x_3} \in W_3$ で $\boldsymbol{x_1} = -\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}$ 従って $\boldsymbol{x_1} \in W_2 + W_3$ であるから $\boldsymbol{x_1} \in W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ よって $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ ここから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 \in W_2 \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ 従って $(W_1 + W_2) \cap W_3 \subset \{\boldsymbol{0}\}$ だが、$\boldsymbol{0} \in (W_1 + W_2) \cap W_3$ だから $(W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ（ここの説明ではくどくなってしまったが、以降の説明では部分空間が $\boldsymbol{0}$ を含む旨は暗黙の了解として、特に必要がない限りいちいち断らない）。
（3）$\alpha\boldsymbol{a} \in W \quad (\alpha \in K)$ とする。もし $\alpha \neq 0$ ならば $\boldsymbol{a} = \alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{a}) \in W$ となって仮定に反する。よって $\mathrm{S}(\boldsymbol{a}) \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ である（これは幾何学的には、W に含まれない一次元部分空間と W との共通部分は原点のみであるという明白なことを意味する）。
（4）$T(\mathrm{S}(\boldsymbol{a})) = T(\{\alpha\boldsymbol{a} | \alpha \in K\}) = \{T(\alpha\boldsymbol{a}) | \alpha \in K\} = \{\alpha T(\boldsymbol{a}) | \alpha \in K\} = \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}))$
（5）$\boldsymbol{x} \in T(W_1 + W_2)$ とすると $\exists \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \exists \boldsymbol{y_2} \in W_2$ で $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = T(\boldsymbol{y}_1) + T(\boldsymbol{y}_2) \in T(W_1) + T(W_2)$
$\boldsymbol{x} \in T(W_1) + T(W_2)$ とすると $\exists \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \exists \boldsymbol{y_2} \in W_2$ で $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{y}_1) + T(\boldsymbol{y}_2) = T(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \in T(W_1 + W_2)$
従って $T(W_1 + W_2) = T(W_1) + T(W_2)$
（5）' $\boldsymbol{x} \in T\left(W\right) \cap \mathrm{Ker}T^{m-1}$ とすれば、$\boldsymbol{x} \in T\left(W\right)$ より $\exists \boldsymbol{y} \in W$ で $\boldsymbol{x} = T\left(\boldsymbol{y}\right)$ である。また $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}T^{m-1}$

より

$$T^m(\boldsymbol{y}) = T\left(T^{m-1}(\boldsymbol{x})\right) = T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

だから $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}T^m$ である。よって $\boldsymbol{y} \in W \cap \mathrm{Ker}T^m = \{\boldsymbol{0}\}$ より $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である。したがって $T(W) \cap \mathrm{Ker}T^{m-1} = \{\boldsymbol{0}\}$ である。

（５）’’ $\boldsymbol{x} \in T(W_1) \cap T(W_2)$ とすれば $\exists \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \exists \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ で $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{y}_1) = T(\boldsymbol{y}_2)$ である。$\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \in (W_1 \oplus W_2) \cap \mathrm{Ker}T$ であるが、m は正整数だから $\mathrm{Ker}T \subset \mathrm{Ker}T^m$ であり、したがって

$$\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \in (W_1 \oplus W_2) \cap \mathrm{Ker}T \subset (W_1 \oplus W_2) \cap \mathrm{Ker}T^m = \{\boldsymbol{0}\}$$

より $\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$ である。よって $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ より $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ であるから $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である。したがって $T(W_1) \cap T(W_2) = \{\boldsymbol{0}\}$ である。

（６）$\boldsymbol{x} \in T(\mathrm{Ker}\ T^m)$ とすると $\exists \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\ T^m$ で $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{y})$ よって $T^{m-1}(\boldsymbol{x}) = T^{m-1}(T(\boldsymbol{y})) = T^m(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ よって $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ T^{m-1}$ 従って $T(\mathrm{Ker}\ T^m) \subset \mathrm{Ker}\ T^{m-1}$

（７）これは V が有限次元であることに注意すれば（１）～（３）によって明らか（正確には帰納法）である。

注意：（１）と（２）が成り立つので、$(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ と $W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3)$ と $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ およびこれ等の W_1, W_2, W_3 の順序を変えたものはすべて同じ意味となることが分る。

例えば $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3 = (W_2 \oplus W_1) \oplus W_3 = W_2 \oplus (W_1 \oplus W_3)$ より $W_2 \cap (W_1 + W_3) = \{\boldsymbol{0}\}$

同様にして $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ と $W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{\boldsymbol{0}\}$ が $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ から導かれる。つまり $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ なら $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ である。また逆に $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ なら $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ は明らかである。またさらに、W_i の数が増えても同様のことが成り立つのも明らかである。

4.2.2　証明

Step1：$m = \mathrm{n}(T)$ と置く。

Step2：$V = \mathrm{Ker}\ (T^m) \supsetneqq \mathrm{Ker}\ (T^{m-1})$ に注意して $V = \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_1^{(m)}) \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_2^{(m)}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_{k(m)}^{(m)}) \oplus \mathrm{Ker}\ (T^{m-1})$ となるように V の元 $\boldsymbol{a}_i^{(m)} \quad (1 \leqq i \leqq k(m))$ を取って固定する[*4]。$m = 1$ ならこれで終了する。

Step3：$\mathrm{Ker}\ (T^{m-1}) \supset T(\mathrm{S}(\boldsymbol{a}_1^{(m)}) \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_2^{(m)}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_k^{(m)})) \oplus \mathrm{Ker}\ (T^{m-2}) = \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_1^{(m)})) \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_2^{(m)})) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_k^{(m)})) \oplus \mathrm{Ker}\ (T^{m-2})$ に注意する。$\mathrm{Ker}\ (T^{m-1}) = \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_1^{(m)})) \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_2^{(m)})) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_k^{(m)})) \oplus \mathrm{Ker}\ (T^{m-2})$ ならば Step4 へ進む。そうでなければ $\mathrm{Ker}\ (T^{m-1})$ の元 $\boldsymbol{a}_i^{(m-1)} \quad (k(m)+1 \leqq i \leqq k(m-1))$ を付け加えて $\mathrm{Ker}\ (T^{m-1}) = \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_1^{(m)})) \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_2^{(m)})) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(T(\boldsymbol{a}_{k(m)}^{(m)})) \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_{k(m)+1}^{(m-1)}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(\boldsymbol{a}_{k(m-1)}^{(m-1)}) \oplus \mathrm{Ker}\ (T^{m-2})$ となるようにする。

Step4：$\boldsymbol{a}_i^{(m-1)} = T(\boldsymbol{a}_i^{(m)}) \quad (1 \leqq i \leqq k(m))$ と置く。

Step5：m の値を一つ減じる（例えば $m = 5$ なら $m = 4$ とする)。ここで $m = 1$ ならこれで終了する。そうでなければ Step3 に帰る[*5]。

以上の処理が完了すれば

$$V = \bigoplus_{m=1}^{\mathrm{n}(T)} \left(\mathrm{S}(T; \boldsymbol{a}_{k(m+1)+1}^{(m)}) \oplus \mathrm{S}(T; \boldsymbol{a}_{k(m+1)+2}^{(m)}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}(T; \boldsymbol{a}_{k(m)-1}^{(m)}) \oplus \mathrm{S}(T; \boldsymbol{a}_{k(m)}^{(m)})\right)$$

となっていることが分る（但し $k(\mathrm{n}(T) + 1) = 0$ とする)。

なお

[*4] これは 4.1 で $\boldsymbol{a}$ を取ったことに対応する。

[*5] プログラミング的にいえば、以上は 2 次元配列 $a[m][i]$（データ型は ” ベクトル ”）を適宜埋めていくアルゴリズムを与えている。

$$
\begin{aligned}
k(m)-k(m+1) &= (\dim\,(\mathrm{Ker}\;T^m)-\dim\,(\mathrm{Ker}\;T^{m-1}))-(\dim\,(\mathrm{Ker}\;T^{m+1})-\dim\,(\mathrm{Ker}\;T^m)) \\
&= ((\dim V-\mathrm{rank}\;T^m)-(\dim V-\mathrm{rank}\;T^{m-1}))-((\dim V-\mathrm{rank}\;T^{m+1})-(\dim V-\mathrm{rank}\;T^m)) \\
&= (\mathrm{rank}\;T^{m-1}-\mathrm{rank}\;T^m)-(\mathrm{rank}\;T^m-\mathrm{rank}\;T^{m+1}) \\
&= \mathrm{rank}\;(T^{m-1})-2\;\mathrm{rank}\;(T^m)+\mathrm{rank}\;(T^{m+1})
\end{aligned}
$$

であり、3 節の結果に一致していることに注意せよ。
証明終わり。

5　固有値がただ一つのみの行列の標準形

A を固有値がただ一つのみの行列とし、α をその固有値とする。この場合 $A-\alpha E$ はベキ零行列であるから、3 節の結果によって、$P^{-1}(A-\alpha E)P = J(0,i)$ の直和 となるような正則行列 P が存在する。よって $P^{-1}AP = (J(0,i)$ の直和$) + P^{-1}(\alpha E)P = (J(0,i)$ の直和$) + \alpha E = J(\alpha,i)$ の直和 となって、A は固有値 α に対するジョルダン細胞の "ある" 直和に**順序を除いて一意的に相似**[*6]であることが分る。

6　一般の行列の標準形

V を線型空間、T を V の線型変換、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ を T の（異なる）固有値のすべてとする。このとき次の条件を満たす V の部分空間 $V_1,V_2,\ldots,V_m$ が存在する。
（1）$V = V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$
（2）$V_i\quad(1\leqq i\leqq m)$ は T 不変
（3）$T|V_i$ の固有値は α_i のみ

なお次の 6.1 で示す様に、この V_i は（T と α_i から）一意的に定まることが分る。よって（1）〜（3）が示されれば、5 と合わせて次の重要な結果を得る。

定理（**ジョルダンの標準形**）：任意の正方行列に対してそれと相似であるようなジョルダン行列が存在する。しかもそのようなジョルダン行列は、そのジョルダン細胞を（直和として）並べる順序を除いて一意的である[*7]。

6.1　広義固有空間

（1）〜（3）を満たす V_i が存在すれば、これらは T と α_i から一意的に定まることを示す。
各 V_i について $T|V_i-\alpha_i I|V_i = (T-\alpha_i I)|V_i$（但し I は V の恒等変換）は V_i のベキ零変換である。よって $\forall\boldsymbol{x}\in V_i$ に対して $\exists k$（k は正整数）で $(T-\alpha_i I)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が成り立つ。
従って $W_i = \{\boldsymbol{x}\in V|\exists k$（$k$ は正整数）で $(T-\alpha_i I)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ と置くと、$V_i\subset W_i$ である。この W_i が V の部分空間であることは容易に分る。

*6 $(J(\alpha,i)$ の直和$)-\alpha E = J(0,i)$ の直和 であることおよび 3 節の最後に述べたことに注意せよ。
*7 存在の方は問題ないであろうが、一意性の方は若干説明を要するので 8 節に補足として説明した。

W_i を固有値 α_i に対する T の**広義固有空間**と呼ぶ。固有値 α_i に対する T の広義固有空間は固有値 α_i に対する T の固有空間をその部分空間として含むことに注意せよ。

$V_i = W_i$ を示せば V_i が T と α_i から一意的に定まることが分る。$V_i \subset W_i$ はすでに分っているので、$V_i \supset W_i$ を示せば良い。
$(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を直和に分解して、$\boldsymbol{x} = \sum_j \boldsymbol{x}_j \quad (\boldsymbol{x}_i \in V_j)$ と置く。V_j は T 不変、従って $(T-\alpha_i I)$ 不変なので、$(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}_j) \in V_j$ よって $(T-\alpha_i I)^k(\sum_j \boldsymbol{x}_j) = \sum_j (T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{0}$ は直和だから、$(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{0}$ である。ここで $j \neq i$ のときは $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$ であることを示す[*8]。
$S_j = T - \alpha_j I$ と置くと、$T - \alpha_i I = S_j + (\alpha_j - \alpha_i)I$ である。$\boldsymbol{x}_j \in V_j$ だから、もし $\boldsymbol{x}_j \neq \boldsymbol{0}$ ならば $S_j^l(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{0}$ かつ $S_j^{l-1}(\boldsymbol{x}_j) \neq \boldsymbol{0}$ となる正整数 l がある（$S_j^0 = I$ かつ S_j は V_j でベキ零であることに注意)。
$\boldsymbol{0} = S_j^{l-1}(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}_j) = S_j^{l-1}(S_j + (\alpha_j - \alpha_i)I)^k(\boldsymbol{x}_j) = (\alpha_j - \alpha_i)^k S_j^{l-1}(\boldsymbol{x}_j)$
ところが $j \neq i$ のときは $\alpha_j - \alpha_i \neq 0$ だから、$S_j^{l-1}(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{0}$ となって l の取り方に反する。よって $j \neq i$ ならば $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$ である。従って $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i \in V_i$ つまり $V_i \supset W_i$ が示された。

6.2 （1）〜（3）の証明

ここでは（1）〜（3）を満たす V_i の存在を示す。広義固有空間 W_i が（1）〜（3）の性質を持つことを示すというのが自然な方針である。

6.2.1 広義固有空間が T 不変であること

$(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $(T-\alpha_i I)^k T(\boldsymbol{x}) = T(T-\alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから W_i は T 不変である。

6.2.2 異なる広義固有空間の和は直和であること

和として考える異なる広義固有空間の数を m として、m による帰納法で示す。
$m = 1$ のときは明らかに正しい。$m > 1$ として、$m-1$ 以下では正しいとする。
帰納法の仮定により、$W = W_2 + W_3 + \cdots + W_m$ は直和である。従って $W_1 \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せば、$W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ が直和であることが分り、帰納法が完成する。$\boldsymbol{x} \in W$ だから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + \cdots + \boldsymbol{x}_m$ 但し $\boldsymbol{x}_i \in W_i \, (2 \leq i \leq m)$ と書ける。また、$\boldsymbol{x} \in W_1$ だから正整数 k があって、$(T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である。よって $(T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}_2) + (T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}_3) + \cdots + (T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{0}$ となるが、W_i が T 不変従って $T - \alpha_1 I$ 不変であるから、$(T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}_i) \in W_i$ よって直和の性質から $(T-\alpha_1 I)^k(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{0}$ である。この先は 6.1 の最後に示したのとまったく同じ議論で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が分る。
証明終わり。

6.2.3 $T|W_i$ の固有値が α_i のみであること

α を $T|W_i$ の固有値、$\boldsymbol{x}$ を α に関する固有ベクトルとする。もちろん $\boldsymbol{x} \in W_i$ である。一方 T で考えても α は T の固有値かつ $\boldsymbol{x}$ は α に関する固有ベクトルである。これに注意して、α に対する T の広義固有空間を

[*8] ここで述べるものよりもすっきりした証明があるが、多少予備知識を要するので、それは後の 7 節で紹介する。

W_j とする。もし $W_j \neq W_i$ ならば $W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\}$ なので、$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となって $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルであるという仮定に反する。よって $W_j = W_i$ 従って $\alpha = \alpha_i$ である。

6.2.4 $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ であること

T の固有多項式を一次因子に分解して $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{k_i}$ と置く。但しここで $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ は T の異なる固有値のすべてとする（なお、以下の説明では簡略化のため、必ずしも同じではないサイズの単位行列や零行列（正方行列でない零行列を含む）をそれぞれ同じ E, O で表すが、混乱はないと思うので了承されたい)。
三角化定理と行と列の置換を考えれば、T は適当な基底によって

$\begin{pmatrix} A & * \\ O & B \end{pmatrix}$（但しここで A, B は上三角行列、さらに A は k_1次正方行列で対角成分がすべてα_1）

の形に行列表示できることが分る。$A - \alpha_1 E$ はベキ零であるから適当な自然数 l が存在して $(A - \alpha_1 E)^l = O$ となるので

$$\left(\begin{pmatrix} A & * \\ O & B \end{pmatrix} - \alpha_1 E\right)^l = \begin{pmatrix} A - \alpha_1 E & * \\ O & B - \alpha_1 E \end{pmatrix}^l = \begin{pmatrix} O & * \\ O & (B - \alpha_1 E)^l \end{pmatrix}$$

ここから固有値 α_1 に対する行列 $\begin{pmatrix} A & * \\ O & B \end{pmatrix}$ の広義固有空間 W_1' は標準基底 $e_1, e_2, \ldots, e_{k_1}$ を含むことが分る。よって $\dim W_1' \geqq k_1$ である。
ここで W_1 は明らかに W_1' と同型だから $\dim W_1 \geqq k_1$ である。同様にして $\dim W_i \geqq k_i$ が分る。
一方 $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ が直和であることから $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_m$
W は V の部分空間だから $\dim W \leqq \dim V$ よって $\dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_m \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_m$
以上から $\dim W = \dim V$ が分る。従って $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ が示された。

注意：同時に $\dim W_i = k_i$ も示されている。

7 補足

これから説明する多項式に関するある性質を利用すると、6.1 で述べた $\alpha_i \neq \alpha_j$ かつ $(T - \alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ かつ $(T - \alpha_j I)^l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であることの別証明と、6 節（1）〜（3）の別証明が得られる。

K を体とし、x を不定元とする。K の元を係数とする x の多項式全体の集合を $K[x]$ で表す。$f_1, f_2, \ldots, f_k \in K[x]$ に対して次が成り立つ（証明は 7.3 参照)。

命題１：

$f_1, f_2, \ldots, f_k$が互いに素（定数以外の共通因数を持たない）ならば
$\exists g_1, g_2, \ldots, g_k \in K[x]$ で $g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_k f_k = 1$

これはユークリッドの互除法によって示すことができるが、ユークリッドの互除法はアルゴリズムとしては秀逸だが、それがアルゴリズムであるため、理論的にはやや扱い難い。理論的に扱い易いのはイデアルである。

7.1　$K[x]$ のイデアル

$K[x]$ の部分集合 $\mathfrak{a}$ が**イデアル**であるとは
（1）$\forall f, g \in \mathfrak{a}$ について $f + g \in \mathfrak{a}$
（2）$\forall f \in K[x], \forall g \in \mathfrak{a}$ について $fg \in \mathfrak{a}$
の二条件が成り立つことをいう。

注意：（2）から $\forall f \in \mathfrak{a}$ について $-f = -1 \cdot f \in \mathfrak{a}$ が分る。これと（1）から $\mathfrak{a}$ は $K[x]$ の加法部分群になっていることが分る。

7.2　単項イデアル

f を $K[x]$ の元とする。$K[x]$ の部分集合 $\{\ gf \mid g \in K[x]\ \}$ は f を含む最小のイデアルである。これを f が生成する**単項イデアル**と呼び、記号で (f) と表す。重要なのは次の命題である。

命題２：

$K[x]$ のイデアルはすべて単項イデアルである。

証明：
$\mathfrak{a}$ をイデアルとする。$\mathfrak{a} = \{0\}$ の場合は $\{0\} = (0)$ なので正しい。$\mathfrak{a} \neq \{0\}$ として f を 0 でない $\mathfrak{a}$ の元の内でその次数が最小のものとする。(f) は f を含む最小のイデアルなので、$(f) \subset \mathfrak{a}$ である。
$g \in \mathfrak{a}$ として g を f で割った商を q、余りを r と置くと、$g = qf + r$ である。$\mathfrak{a}$ はイデアルなので $r = g - qf \in \mathfrak{a}$ である。ここでもし $r \neq 0$ ならば f の取り方（次数の最小性）に反するので、$r = 0$ である。
よって $g = qf \in (f)$ よって $\mathfrak{a} \subset (f)$ 従って $(f) = \mathfrak{a}$
証明終わり。

7.3　命題１の証明

$\mathfrak{a} = \{\ g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_k f_k \mid g_1, g_2, \ldots, g_k \in K[x]\ \}$ と置く。$\mathfrak{a}$ がイデアルであることは容易に分る。従って命題２によって $\exists f \in K[x]$ で $\mathfrak{a} = (f)$ である。また明らかに $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathfrak{a}$ だから f は f_i の共通因数であり、従って仮定によって 0 でない定数である。よって $1 = f^{-1} f \in (f) = \mathfrak{a}$ 従って $\exists g_1, g_2, \ldots, g_k \in K[x]$ で $g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_k f_k = 1$ が示された。

7.4　6.1 で述べたことの別証明

$\alpha_i \neq \alpha_j$ であれば $(x - \alpha_i)^k$ と $(x - \alpha_j)^l$ は互いに素（7.5 の脚注参照）だから命題１によって
$\exists f(x), g(x) \in K[x]$ で $f(x)(x - \alpha_i)^k + g(x)(x - \alpha_j)^l = 1$ である。
よって $f(T)(T - \alpha_i I)^k + g(T)(T - \alpha_j I)^l = I$ である。
従ってこの場合 $(T - \alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ かつ $(T - \alpha_j I)^l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ が成り立てば
$\boldsymbol{x} = I(\boldsymbol{x}) = (f(T)(T - \alpha_i I)^k + g(T)(T - \alpha_j I)^l)(\boldsymbol{x}) = f(T)(T - \alpha_i I)^k(\boldsymbol{x}) + g(T)(T - \alpha_j I)^l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
証明終わり。

7.5　6（1）〜（3）の別証明

T の固有多項式 $\Phi(x)$ を一次因子に分解して $\Phi(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{k_i}$ として $f_i(x) = \dfrac{\Phi(x)}{(x-\alpha_i)^{k_i}}$ と置くと、$f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ は互いに素である。[*9]
よって $\exists g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x) \in K[x]$ で $g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + \cdots + g_m(x)f_m(x) = 1$ である。
ここで $P_i = g_i(T)f_i(T)$ と置けば

$$
\begin{aligned}
&P_1 + P_2 + \cdots + P_m = I \\
&P_iP_j = 0 \qquad (\text{但し } i \neq j)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。従って $V_i = P_i(V)$ とすると、資料「射影子とスペクトル分解」の 2 節の結果から、V_i は 6 の（1）（2）を満たす。
最後に（3）を示す。$\boldsymbol{x} \in V_i$ を $T|V_i$ の固有ベクトル、その固有値を α とすると $(T-\alpha I)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ である。一方で $P_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$（資料「射影子とスペクトル分解」の 1 節および 2 節を参照）であることと $(T-\alpha_i I)^{k_i}P_i = \boldsymbol{O}$ に注意すれば、$(T-\alpha_i I)^{k_i}(\boldsymbol{x}) = (T-\alpha_i I)^{k_i}P_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ が分る。よってもし $\alpha \neq \alpha_i$ ならば 7.4 によって $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となって $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルであるという仮定に反する。従って $\alpha = \alpha_i$ である。
証明終わり。

8　ジョルダンの標準形の一意性に関しての補足

T がある基底によって $J(\alpha_1, k_1)\dot{+}J(\alpha_1, k_1)\dot{+}\cdots\dot{+}J(\alpha_m, k_m)$ とジョルダン細胞の直和で行列表示されたとする。このとき $J(\alpha_i, k_i)$ に対応する V の部分空間を W_i とすると $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ である。
α を T の固有値として、$\alpha_i = \alpha$ となる $J(\alpha_i, k_i)$ に対応する W_i をすべて集め、それらの和（直和）を V_α とすれば、

$$V = \bigoplus_{\alpha \text{は } T \text{ の固有値}} V_\alpha$$

が 6 節の（1）〜（3）を満たすことは容易に分る。よって一意性から V_α は α の広義固有空間である。そうしてこの V_α 内での $J(\alpha_i, k_i)$ たちの順序を除いた一意性は 5 節の冒頭に述べたとおりである。

[*9] 仮にそうでないとすると 1 次以上の共通因子が存在するので、それを $f(x)$ とする。$f(x)$ は 1 次以上なので方程式 $f(x) = 0$ は K の適当な拡大体で根を持つ。それを α とすれば α は $f_i(x) = 0$ の共通根であるが、α_i がすべて異なるので、これは不可能である。