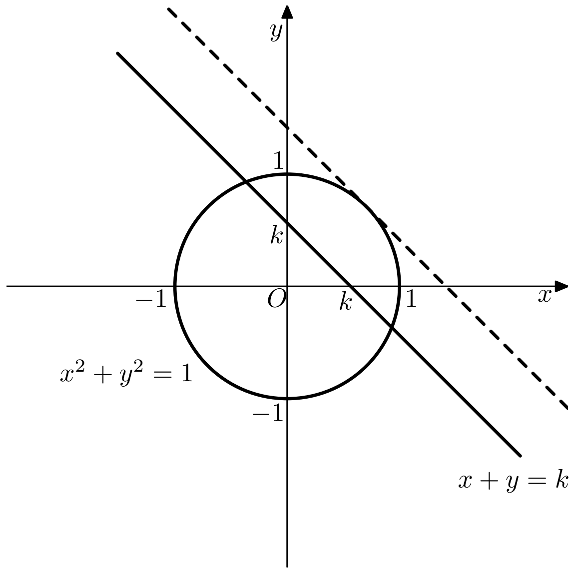
平成21年5月13日　八起数学塾

ラグランジュ乗数法

「(x,y) が $x^2+y^2=1$ を満たすとき、$x+y$ の最大値を求めよ。」



高校の数学でやるように、この問題は右の図のようにグラフを画いて解く事ができる。つまり、直線 $x+y=k$ と円 $x^2+y^2=1$ が**共有点を持つ**という条件下での k の最大値を図から判断するのである。

この図を使って解くやり方を参考に、そこに微分法をうまく組み合わせることで、ラグランジュ乗数法が得られる。

k をパラメーターにして直線 $x+y=k$ を動かすのだが、k が最大になったときに $x^2+y^2=1$ と $x+y=k$ との共有点はどのような状況にあるのかを考える。仮に円と直線がその共有点で交差しているのならば、k を少し大きくしたとしてもまだ円と直線は交差しているであろうから、その共有点で k が最大になるという条件に反する。よって、その共有点で円と直線は接している。

この話を $g(x,y)=0$ という条件下で $f(x,y)$ の最大値（もちろんそれが有るとして）を求める問題に一般化する。この場合も、円と直線の場合と同様にやはり $f(x,y)$ が最大値 k_{max} をとる所では $g(x,y)=0$ と $f(x,y)=k_{max}$ とが接しているはずである（なお、特異点等については別途考えればよいから、ここではそこが f や g の特異点になっているといったことは考えない)。
従ってその共有点（接点）を (x_0,y_0) とすれば、点 (x_0,y_0) において、両曲線の接線は一致する。
言い換えれば、(x_0,y_0) での両曲線の法線は一致する。
この条件は (x_0,y_0) での両曲線の法線ベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(x_0,y_0) \\ g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書く事ができる（なお λ は0でない何らかの実数であるが、以下この点はいちいち断らない)。
よって (x_0,y_0) は次の連立方程式（の (x,y)）を満たすことがわかる。

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

これが束縛条件のない3変数関数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ の極値問題を微分法により解くのと同一である点に注意せよ。

次に三次元で考える。$g(x,y,z)=0$ という条件下で $f(x,y,z)$ の最大値を求める問題であれば、曲線が曲面に変わるだけで、今と全く同じである。共有点 (x_0,y_0,z_0) で両曲面が接するというのはその点での両曲面の

接平面が一致する事であり、それは (x_0, y_0, z_0) での両曲面の法線ベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(x_0,y_0,z_0) \\ g_y(x_0,y_0,z_0) \\ g_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書く事ができるので、次の連立方程式の解として x_0, y_0, z_0 を求めればよい。そしてこれは束縛条件のない４変数関数 $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ の極値問題を微分法により解くのと同一である。

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

しかし三次元ではさらに $g(x,y,z) = 0$ かつ $h(x,y,z) = 0$ という条件下で $f(x,y,z)$ の最大値を求める問題も考えられる。

なおこの場合、$g(x,y,z) = 0$ と $h(x,y,z) = 0$ が全く共有点を持たないとか持っても有限個であるとか、あるいは一部もしくは全体で曲面が一致してるといった状況はもちろん有り得るが、今はそういった面倒なことは考えず、この二つの曲面は交わって、その共通部分が空間曲線 C になっているとする。そうすれば、問題は「C と共有点を持つ曲面 $f(x,y,z) = k$ の中で k が最大になるものを求めよ。」ということになる。

今までと同様に、k が最大になった時、$f(x,y,z) = k$ と C との共有点 (x_0, y_0, z_0) においては曲面 $f(x,y,z) = k$ と曲線 C とが接しているはずである。よって、点 (x_0, y_0, z_0) における曲線 C の接線は、点 (x_0, y_0, z_0) における曲面 $f(x,y,z) = k$ の接平面に含まれている（微分可能ではない場合等については別途考えればよい)。また、曲面 $g(x,y,z) = 0$ と曲線 C との関係を考えると、C は曲面 $g(x,y,z) = 0$ に含まれているので、当然 C はそれ自身の全ての点で $g(x,y,z) = 0$ に接している。曲面 $h(x,y,z) = 0$ と曲線 C との関係も同じである。

点 (x_0, y_0, z_0) における曲線 C の接線を l, この l に平行なベクトル（$\neq 0$）を一つ選んで $\boldsymbol{v}_l$ とし、曲面 $f(x,y,z) = k, g(x,y,z) = 0, h(x,y,z) = 0$ の接平面をそれぞれ π_f, π_g, π_h と置き、π_f, π_g, π_h の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{v}_g, \boldsymbol{v}_h$ とせよ。
上記から、平面 π_f, π_g, π_h は直線 l を共有していることがわかる。さらに、$g(x,y,z) = 0$ と $h(x,y,z) = 0$ とは交わって、その共通部分が空間曲線 C になっていると仮定しているので、π_g と π_h は l で交差していることがわかる。よって $\boldsymbol{v}_g$ と $\boldsymbol{v}_h$ とは線形独立である。また、$\boldsymbol{v}_l$ は $\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{v}_g, \boldsymbol{v}_h$ と直交しており（考えているのは三次元だから)、$< \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_g, \boldsymbol{v}_h >$ は基底を成す。この基底で $\boldsymbol{v}_f$ を表して、$\boldsymbol{v}_f = \kappa \boldsymbol{v}_l + \lambda \boldsymbol{v}_g + \mu \boldsymbol{v}_h$ とせよ。この両辺に $\boldsymbol{v}_l$ を内積すると $0 = \kappa \|\boldsymbol{v}_l\|^2$ 従って $\kappa = 0$ よって $\boldsymbol{v}_f = \lambda \boldsymbol{v}_g + \mu \boldsymbol{v}_h$
ここで

$$\boldsymbol{v}_f = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_g = \begin{pmatrix} g_x(x_0,y_0,z_0) \\ g_y(x_0,y_0,z_0) \\ g_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_h = \begin{pmatrix} h_x(x_0,y_0,z_0) \\ h_y(x_0,y_0,z_0) \\ h_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \tag{5}$$

としていいから。$g(x,y,z) = 0$ かつ $h(x,y,z) = 0$ の条件を加えてこれを連立方程式の形にすれば

$$
\begin{cases}
g(x,y,z)=0 \\
h(x,y,z)=0 \\
f_x(x,y,z)-\lambda g_x(x,y,z)-\mu h_x(x,y,z)=0 \\
f_y(x,y,z)-\lambda g_y(x,y,z)-\mu h_y(x,y,z)=0 \\
f_z(x,y,z)-\lambda g_z(x,y,z)-\mu h_z(x,y,z)=0
\end{cases} \tag{6}
$$

これは束縛条件のない５変数関数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)-\mu h(x,y,z)$ の極値問題を微分法により解くのと同一である。

注意１：本来ラグランジュ乗数法で求めるのは条件付の極値（の候補）である。これについては上記の最大値を極値と読み替えればよい。

注意２：ラグランジュ乗数法を証明するには、陰関数定理（あるいは逆関数定理）が必要である。証明は例えば解析概論（高木貞治著、岩波書店）の第７章を参照されたい。