平成２１年5月１３日　八起数学塾

基底の取替えと行列表示

1　問題

K を体とし、E 及び E' をそれぞれ K^n の基底、$f: K^n \longrightarrow K^n$ を線型変換とする。ここで f を基底 E で表したときの行列を A、基底 E' で表したときの行列を B と置くときに、A と B の間の関係はどうなっているか。

2　解答

基底の取替え $E \longrightarrow E'$ の行列を T と置けば

$$B = T^{-1}AT$$

である。

以下これを説明する。
$\boldsymbol{x} \in K^n, \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ とし、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を基底 E によって対応させた数ベクトルと、基底 E によって対応させた数ベクトルを順に

$$(x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (y_i) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (x'_i) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad (y'_i) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

と置く。すると行列 A, B の定義から

$$(y_i) = A(x_i) \tag{1}$$
$$(y'_i) = B(x'_i) \tag{2}$$

が成り立つ。
また基底の取替え行列の性質から

$$(x_i) = T(x'_i) \tag{3}$$
$$(y_i) = T(y'_i) \tag{4}$$

である。(1) 式と (2) 式を (4) 式に代入すれば $A(x_i) = TB(x'_i)$、また (3) 式から $(x'_i) = T^{-1}(x_i)$ なので、これを今の式に代入すると $A(x_i) = TBT^{-1}(x_i)$ である。ここで (x_i) は任意だから結局 $A = TBT^{-1}$ すなわち $B = T^{-1}AT$ である。
これは以下のような可換図式にしてみるとわかりやすい。

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{A} & K^n \\ {\scriptstyle T}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{-1}} \\ K^n & \xrightarrow{B} & K^n \end{array}$$