平成２１年６月１２日　八起数学塾

ネーターの正規化定理

1　ネーターの正規化定理

定理 1.1 (ネーターの正規化定理).

A を体 k 上の有限生成代数とする。A が零環でなければ $\exists y_1, ..., y_m \in A$ で以下が成り立つ。

1. $y_1, ..., y_m$ は k 上代数的に独立
2. A は $k[y_1, ..., y_m]$ の整拡大

証明を述べる前に、もっとも単純と思われる具体例について、この定理を確かめておく。

体上では「整」と「代数的に従属」は同義である。(体上では単に代数的と呼ぶ)。しかし一般の環上ではこの両者の間に大きな違いがある。例えば k を体とし、x を不定元とする。$x^{-1} \in k(x)$ は $x \cdot x^{-1} - 1 = 0$ より $k[x]$ 上代数的に従属だが、整ではない。実際 x^{-1} が $k[x]$ 上整であるとすると、$\exists n \geqq 1, \exists f(x) \in k[x]$ で $x^{-n} + f(x)x^{-(n-1)} = 0$ と書ける。これの両辺に x^n を掛けると $1 + xf(x) = 0$ となって x の超越性に反する。従って $k[x] \hookrightarrow k[x, x^{-1}]$ は整拡大ではない。一方で $y = x + x^{-1}$ と置くと、$x^2 - yx + 1 = 0, x^{-2} - yx^{-1} + 1 = 0$ より $k[y] \hookrightarrow k[x, x^{-1}]$ は整拡大である。

y が k 上超越的であることを示す。実際もし y が代数的に従属であれば、k は体だから整である。ところが x は $k[y]$ 上整であるから x が k 上整となり矛盾である。

ネーターの正規化定理の証明.

A は零環でない k の有限拡大代数だから、$A = k[x_1, ..., x_n]$ と書ける。この n に関する帰納法により証明する。

$n = 0$ なら何も言うことはない。$n \geqq 1$ かつ $n - 1$ 以下では主張が正しいとする。

$x_1, ..., x_n$ が k 上代数独立ならば主張は正しい。

$x_1, ..., x_n$ が k 上代数独立ではないとして、$x_1, ..., x_n$ の k 上の代数関係を

$$\sum_{\alpha_1 + ... + \alpha_n = N} a_\alpha x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} + N \text{ 次未満の項} = 0$$

(但し $N \geqq 1, \alpha_i \geqq 0$ は整数、$\alpha = (\alpha, ..., \alpha_n)$、$a_\alpha$ のうち少なくとも 1 つは 0 でない) とする。

その１：k が無限体である場合にのみ通用する証明

$X_i = x_i - b_i x_n$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ と置く。但し $b_i \in k$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ は後で決める。$x_i = b_i x_n + X_i$ を上記の代数関係に代入すれば、" $(\sum_{\alpha_1 + ... + \alpha_n = N} a_\alpha b_1^{\alpha_1} ... b_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) x_n^N + x_n$に関して N 次未満の項 $= 0$ " となる。

k は無限体だから、適当に $b_i \in k$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ を選べば、$\sum_{\alpha_1 + ... + \alpha_n = N} a_\alpha b_1^{\alpha_1} ... b_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \neq 0$ とできる。

従って x_n は $k[X_1, ..., X_{n-1}]$ 上整であり、帰納法の仮定から、k 上代数的に独立で、かつ $k[y_1, ..., y_m] \hookrightarrow k[X_1, ..., X_{n-1}]$ が整拡大であるような $y_1, ..., y_m \in k[X_1, ..., X_{n-1}]$ が存在する。$X_1, ..., X_{n-1}$ と x_n が $k[y_1, ..., y_m]$ 上整だから $x_1, ..., x_{n-1}$ も $k[y_1, ..., y_m]$ 上整である。従って $k[y_1, ..., y_m] \hookrightarrow k[x_1, ..., x_n]$ は整拡大であり、主張が証明された。

その２：k が無限体でなくても通用する証明

$X_i = x_i - x_n^{n^{n-i}}$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ と置く。$x_i = x_n^{n^{n-i}} + X_i$ を $a_\alpha x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ に代入して得られる x_n の最高次の項は、$a_\alpha x_n^{\alpha_1 n^{n-1} + \alpha_2 n^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} n + \alpha_n}$ である。ここで $\alpha = (\alpha, ..., \alpha_n)$ を n 進法表示と解釈すれば、この最高次の項は $a_\alpha x_n^\alpha$ と表現できる。$\alpha \geqq N > 0$ に注意して、$a_\alpha \neq 0$ である α の中で最大のものを A とすると "$a_A x_n^A + x_n$に関して A 次未満の項 $= 0$" となって、x_n の $k[X_1, ..., X_{n-1}]$ における整関係が得られる。それ以外は上記その１と同じである。よって主張が証明された。

Q.E.D.