平成２１年８月６日　八起数学塾

平成２１年９月７日　誤字の訂正

正則な線型変換の「極表示」

1　複素数の極表示

z を 0 でない複素数とする。このとき $z=|z|\dfrac{z}{|z|}$ だが、$|z|>0, \left|\dfrac{z}{|z|}\right|=1$ であるから、0 でない複素数は正の数と絶対値が 1 の複素数との積の形に表せることが分かる。

$\dfrac{z}{|z|}=\cos\theta+i\sin\theta(\theta=\arg z)$ だから $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ であり、これはいわゆる複素数の極表示である。複素計量線型空間の正則な線型変換についても、これと同様の表示が可能である。この場合 0 でない複素数に当たるのが正則な線型変換、正の数に当たるのが正値エルミート変換、絶対値が 1 の複素数に当たるのがユニタリ変換である。$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{\bar{z}z}$ に注意すると以下の議論の見通しが良くなる。

2　準備

2.1　T^*T が正値エルミート変換であること

T を複素計量線型空間 V の正則な線型変換とすれば T^*T は正値エルミート変換である。

証明：

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ とする。

$$(\boldsymbol{x}|T^*T(\boldsymbol{y}))=(T(\boldsymbol{x})|T(\boldsymbol{y}))=(T^*T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$$

であるから T^*T はエルミート変換である。

また $\boldsymbol{x}\in V, \boldsymbol{x}\neq 0$ とすると

$$(T^*T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x})=(T(\boldsymbol{x})|T(\boldsymbol{x}))=\|T(\boldsymbol{x})\|^2$$

であって、T が正則かつ $\boldsymbol{x}\neq 0$ だから、$T(\boldsymbol{x})\neq 0$ よって $(T^*T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x})>0$

従って T^*T は正値エルミート変換である。

2.2　$T^{*-1}=T^{-1*}$ であること

T を複素計量線型空間 V の正則な線型変換とすれば $T^{*-1}=T^{-1*}$ が成り立つ。

証明：

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V \text{ に対して } (T^*T^{-1*}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})=(T^{-1*}(\boldsymbol{x})|T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x}|T^{-1}T(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

であるから T^*T^{-1*} は恒等変換である。同様にして $T^{-1*}T^*$ も恒等変換であることが分かるので、

$T^{*-1}=T^{-1*}$ であることが証明された。

2.3 ユニタリ変換について

U をユニタリ変換とする。2.2 とユニタリ変換の定義から

$$U^{-1*} = U^{*-1} = (U^{-1})^{-1}$$

となるので、ユニタリ変換の逆変換もユニタリ変換である。
また U_1, U_2 をユニタリ変換とすると

$$(U_1U_2)^* = U_2^*U_1^* = U_2^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_2)^{-1}$$

よってユニタリ変換とユニタリ変換の積もユニタリ変換である。

2.4 正値エルミート変換の「平方根」

T が正値エルミート変換であれば $T = S^2$ を満たす正値エルミート変換 S が唯一つ存在する。
証明：
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を T の（異なる）固有値のすべてとし、α_i に関する T の固有空間を V_i とする。T はエルミート変換だから

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i \qquad \text{（直和）}$$

となる。ここで $\forall \boldsymbol{x} \in V$ を一つ取って固定する。$\boldsymbol{x}$ を V_i の元の和で表して、

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \boldsymbol{x}_i \qquad (\boldsymbol{x}_i \in V_i)$$

とする。T は正値エルミート変換であるから $\alpha_i > 0$ である。これに注意して

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_i \sqrt{\alpha_i}\boldsymbol{x}_i$$

と置く。α_i 及び V_i はその順序を無視すれば T から一意的に定まる。そして**和は可換**であるから $S(x)$ は上記のように作る限り一意的であることに注意せよ。
S が正値エルミート変換であることを示そう。
$\boldsymbol{x} = \sum_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y} = \sum_i \boldsymbol{y}_i$（但し $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in V_i$）とする。$i \neq j$ なら $V_i \perp V_j$ に注意せよ

$$(\boldsymbol{x}|S(\boldsymbol{y})) = \sum_i \sqrt{\alpha_i}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_i) = (S(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y})$$

であるから S はエルミート変換である。さらに

$$(S(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) = \sum_i \sqrt{\alpha_i}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_i) = \sum_i \sqrt{\alpha_i}\|\boldsymbol{x}_i\|^2$$

であるから S は正値エルミート変換である。

次に $\sqrt{\alpha_i}\boldsymbol{x}_i \in V_i$ に注意すれば

$$S^2(\boldsymbol{x}) = S(\sum_i \sqrt{\alpha_i}\boldsymbol{x}_i) = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum_i T(\boldsymbol{x}_i) = T(\sum_i \boldsymbol{x}_i) = T(\boldsymbol{x})$$

が分るから $S^2 = T$ が成り立つ。
最後に S の一意性を示す。
正値エルミート変換 S が $S^2 = T$ を満たすとする。$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ を S の（異なる）固有値のすべてとし、W_i を β_i に関する S の固有値空間とする。

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} W_i \qquad \text{（直和）}$$

である。
$\boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{x} \neq 0$ とする。$T(\boldsymbol{x}) = S^2(\boldsymbol{x}) = \beta_1^2 \boldsymbol{x}$ となるから β_1^2 は T の固有値であり、$\boldsymbol{x}$ はそれに関する固有ベクトルである。よって β_1^2 は $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ のどれか一つと一致する。ここで $\beta_1^2 = \alpha_1$ としても一般性は失われない。この時 $\boldsymbol{x} \in V_1$ であり、$\boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{x} \neq 0$ の取り方は任意だから $W_1 \subset V_1$ である。また $\beta_1 > 0$ より $\beta_1 = \sqrt{\alpha_1}$ である。β_2 以下に対して同様の議論を続ければ、$l \leqq m$ かつ $W_i \subset V_i, \beta_i = \sqrt{\alpha_i} (1 \leqq i \leqq l)$ として良いことが分かる。よって $\dim W_i \leqq \dim V_i (1 \leqq i \leqq l \leqq m)$ であるが、$\bigoplus_{i=1}^{l} V_i = V = \bigoplus_{j=1}^{l} W_j$ なので $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dim V_i = \sum_{j=1}^{l} \dim W_j$ である。V_i は固有空間なので $\dim V_i \neq 0$ であるから $l = m$ である。さらに $\dim W_i = \dim V_i (1 \leqq i \leqq m)$ も容易に分る。よって $W_i = V_i, \beta_i = \sqrt{\alpha_i} (1 \leqq i \leqq m)$ である。
従って

$$\sum_i \boldsymbol{x}_i \in \bigoplus_{i=1}^{m} V_i \qquad (\boldsymbol{x}_i \in V_i)$$

に対して

$$S(\sum_i \boldsymbol{x}_i) = \sum_i S(\boldsymbol{x}_i) = \sum_i \beta_i \boldsymbol{x}_i = \sum_i \sqrt{\alpha_i}\boldsymbol{x}_i$$

となって、これは先に述べた S に一致する。以上から $S^2 = T$ となる正値エルミート変換 S は存在し、かつ一意的であることが分かった。
そこでこの S を $\sqrt{T}$ で表す。

3 複素計量線型空間の正則な線型変換を正値エルミート変換とユニタリ変換の積で表すこと

複素計量線型空間の正則な線型変換 T は、適当な正値エルミート変換 H とユニタリ変換 U によって $T = HU$ と表せて、しかもこの表し方は一意的である。

以下恒等変換を I で表す。$H = \sqrt{TT^*}$ と置く。H は正値エルミート変換であるから正則である。
$U = H^{-1}T$ と置くと、$T = HU$ である。U がユニタリ変換であることを示す。

$$
\begin{aligned}
U^*U &= (H^{-1}T)^*(H^{-1}T) \\
&= (T^*H^{*-1})(H^{-1}T) \\
&= (T^*H^{-1})(H^{-1}T) \\
&= T^*(H^2)^{-1}T \\
&= T^*(TT^*)^{-1}T \\
&= T^*(T^{*-1}T^{-1})T \\
&= I
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
UU^* &= (H^{-1}T)(H^{-1}T)^* \\
&= (H^{-1}T)(T^*H^{*-1}) \\
&= (H^{-1}T)(T^*H^{-1}) \\
&= H^{-1}(TT^*)H^{-1} \\
&= H^{-1}H^2H^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

よって U はユニタリ変換である。
次いでこの表現が一意的であることを示す。
H_1, H_2 を正値エルミート変換、U_1U_2 をユニタリ変換として $H_1U_1 = H_2U_2$ が成り立っているとする。
$H_2^{-1}H_1 = U_2U_1^{-1}$ だから $H_2^{-1}H_1$ はユニタリ変換である。よって

$$
I = (H_2^{-1}H_1)(H_2^{-1}H_1)^* = (H_2^{-1}H_1)(H_1^*H_2^{*-1}) = H_2^{-1}H_1^2H_2^{-1}
$$

従って $H_1^2 = H_2^2$ また H_1, H_2 は正値エルミート変換だから $H_1 = \sqrt{H_1^2} = \sqrt{H_2^2} = H_2$ ここからさらに $U_2U_1^{-1} = H_2^{-1}H_1 = I$ よって $U_1 = U_2$ である。以上で一意性が示された。

4 複素計量線型空間の正則な線型変換をユニタリ変換と正値エルミート変換の積で表すこと

複素計量線型空間の正則な線型変換 T は、適当なユニタリ変換 U と正値エルミート変換 H によって $T = UH$ と表せて、しかもこの表し方は一意的である。

証明は $H = \sqrt{T^*T}$, $U = TH^{-1}$ と置いて前節と同様である。