平成２１年１０月２日　一部表現他訂正　八起数学塾

射影子とスペクトル分解

1　直和から定まる線型変換

V を線型空間、$W_i\ (1 \leqq i \leqq m)$ をその部分空間として

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i \qquad \text{（直和）}$$

であるとする。

$\boldsymbol{x} \in V$ を $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$（但し $\boldsymbol{x}_i \in W_i$）と表す。この表し方は一意的である。
ここで $P_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_i$ とすると、P_i は V の線型変換である。

この P_i は次の条件を満たす（但し以下で I は恒等変換を表す)。

1. $P_i^2 = P_i$
2. $P_iP_j = 0 \qquad (i \neq j)$
3. $\sum_{i=1}^{m} P_i = I$
4. P_i の固有値は 1 または 0 である。P_i が固有値 1 を持つことと $W_i \neq \{\boldsymbol{0}\}$ は同値であり、このとき固有値 1 に対する固有空間は W_i、P_i が固有値 0 を持つことと $\bigoplus_{j\neq i} W_j \neq \{\boldsymbol{0}\}$ は同値であり、このとき固有値 0 に対する固有空間は $\bigoplus_{j\neq i} W_j$ である。

1.2.3. は明らかである。なお 2.3. が成り立てば $P_i = P_iI = P_i\sum_{j=1}^{m} P_j = \sum_{j=1}^{m} P_iP_j = P_i^2$ より 1. が成り立つことに注意。

4. を示す。P_1 に関して示せば十分である。
α を P_1 の固有値、$\boldsymbol{x}$ を固有値 α に関する固有ベクトルとする。
1. より $\alpha\boldsymbol{x} = P_1(\boldsymbol{x}) = P_1^2(\boldsymbol{x}) = P_1(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha P_1(\boldsymbol{x}) = \alpha^2\boldsymbol{x}$ よって $(\alpha^2 - \alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。ここで $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) = 0$ より $\alpha = 1$ または 0 が分る。
P_1 が固有値 1 を持つとする。W_1 が固有値 1 に対する固有空間に含まれることは P_1 の作り方から明らかである。逆に $\boldsymbol{x}$ を固有値 1 に関する固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$（但し $\boldsymbol{x}_i \in W_i$）と表すと $\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = P_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 \in W_1$ となる。従って W_1 は固有値 1 に対する固有空間であり、$W_1 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である。
$W_1 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ とする。このとき W_1 の $\boldsymbol{0}$ ではないベクトルが P_1 の固有値 1 に関する固有ベクトルになることは明らかであり、従って P_1 は固有値 1 を持ち、先に示したことから W_1 がその固有空間である。
固有値 0 についての議論も $\boldsymbol{x} \in V$ が固有値 0 に関する固有ベクトルとするとき $\boldsymbol{x}_1 = P_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} = \sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{x}_i \in \bigoplus_{j\neq 1} W_j$ であることに注意して同様である。

2　線型変換から定まる直和

前節とは逆に V の線型変換 $P_i\ (1 \leqq i \leqq m)$ が

1. $P_iP_j = 0 \qquad (i \neq j)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} P_i = I$

の2条件を満たすなら、$V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} P_i(V)$（直和）である。この直和に対して前節のやり方で定めた線型変換は P_i と一致する。

証明：

$\boldsymbol{x} = I(\boldsymbol{x}) = (\displaystyle\sum_{i=1}^{m} P_i)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\boldsymbol{x})$ より $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P_i(V)$ である。

$P_1(V) \cap \displaystyle\sum_{i=2}^{m} P_j(V) = \{\boldsymbol{0}\}$ であることを示す。

そのために $\boldsymbol{x} \in P_i(V)$ のとき $\boldsymbol{x} = P_i(\boldsymbol{x})$ であることに注意する。

実際 $\boldsymbol{x} \in P_i(V)$ とすると $\exists \boldsymbol{y} \in V$ で $\boldsymbol{x} = P_i(\boldsymbol{y})$ だが、条件 1.2. から前節で注意した様に $P_i = P_i^2$ なので $\boldsymbol{x} = P_i(\boldsymbol{y}) = P_i^2(\boldsymbol{y}) = P_i(\boldsymbol{x})$。

さて $\boldsymbol{x} \in P_1(V) \cap \displaystyle\sum_{i=2}^{m} P_i(V)$ とすると $\boldsymbol{x} \in P_1(V)$ かつ $\exists \boldsymbol{x}_i \in P_i(V)\ (2 \leqq i \leqq m)$ で $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{x}_i$ だが、今の注意から $\boldsymbol{x} = P_1(\boldsymbol{x}) = P_1(\displaystyle\sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{x}_i) = P_1(\sum_{i=2}^{m} P_i(\boldsymbol{x}_i)) = \sum_{i=2}^{m} P_1P_i(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{0}$。よって $P_1(V) \cap \displaystyle\sum_{i=2}^{m} P_j(V) = \{\boldsymbol{0}\}$ である。

$P_2(V)$ 以下についても同様なので、$V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} P_i(V)$（直和）であることが分った。

また $\boldsymbol{x} = I(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P_i(\boldsymbol{x})$ であって、$P_i(\boldsymbol{x}) \in P_i(V)$ だから、表し方の一意性によって最後の主張も示された。

3　ベキ等変換

定義：線型変換 T が $T^2 = T$ を満たす時、T は**ベキ等変換**であると言う。

1節及び2節で述べた P_iは ベキ等変換である。また、1節の 4. の証明から分る様に、ベキ等変換の固有値は0または1である。

$W_0 = \{\boldsymbol{x} \in V | T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$, $W_1 = \{\boldsymbol{x} \in V | T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$ と置く。$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - T(\boldsymbol{x})) + T(\boldsymbol{x})$ であるが、$T(\boldsymbol{x} - T(\boldsymbol{x})) = T(\boldsymbol{x}) - T^2(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x} - T(\boldsymbol{x}) \in W_0$、また $T(T(\boldsymbol{x})) = T(\boldsymbol{x})$ より $T(\boldsymbol{x}) \in W_1$ よって $V = W_0 + W_1$ である。従って以下のいずれかが成り立つ。

1. $W_0 = \{\boldsymbol{0}\} \iff T$ の固有値は1のみ $\iff T = I$
2. $W_1 = \{\boldsymbol{0}\} \iff T$ の固有値は0のみ $\iff T = \boldsymbol{O}$（零写像）
3. $W_0 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $W_1 \neq \{\boldsymbol{0}\} \iff T$ は固有値0と1を持つ

1.2. の場合に $V = W_0 + W_1$ が直和であることは明白である。3. の場合も W_0, W_1 がそれぞれ固有値 $0, 1$ に対する T の固有空間なので、やはり直和である。この直和分解に対して 1 節と同様に P_0, P_1 を作れば、$T = P_1$ である。また、T が適当な基底によって対角行列表示可能であることにも注意せよ。

4 対角行列で表現できる線型変換について

K を体とし、V を K 上の有限次元ベクトル空間、T を V の（適当な基底に関して）対角行列で表現できる線型変換とする。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を T の相異なる固有値の（すべて）とし、α_i に対する T の固有空間を W_i とする。条件から $V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$（直和）である（資料「固有空間について」2 節参照)。この直和分解に関して 1 節と同様に P_i を作ると、$T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ が成り立つ。

証明：

$\boldsymbol{x} \in V$ であれば、$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$ 但し $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ と書ける。$P_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_i$ に注意せよ。

$T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} T(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i(\boldsymbol{x}) = (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i)\boldsymbol{x}$ ここで $\boldsymbol{x}$ は任意なので $T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ である。

逆に 1 節の P_i と W_i が与えられていて、しかもすべての i $(1 \leqq i \leqq m)$ で $W_i \neq \{\mathbf{0}\}$ である時、K の相異なる m 個の元 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ に対して $T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ と置くと、T は対角行列で表現できる V の線型変換であり、しかも $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ は T の相異なる固有値のすべてであって、α_i に対する T の固有空間は W_i である。

証明：

$\boldsymbol{x} \in W_i$ なら $T(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x}$ だから、$W_i \neq \{\mathbf{0}\}$ に注意すれば、α_i は T の固有値であり、W_i は α_i に対する T の固有空間に含まれる。

次に α を T の固有値、$\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトルとする。$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$ 但し $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ と置くと、

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha \boldsymbol{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i = T(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} T(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$$

よって

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha - \alpha_i)\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

であるから、表し方の一意性によって、すべての i $(1 \leqq i \leqq m)$ で $(\alpha - \alpha_i)\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$

一方 $\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルなので $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$、よって $\exists j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ で $\boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0}$

従って $\alpha = \alpha_j$、また $i \neq j$ では $\alpha = \alpha_j \neq \alpha_i$ より $\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ である。従って $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_j \in W_j$ である。

以上から、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ は T の相異なる固有値のすべてであって、α_i に対する T の固有空間は W_i であることが分った。従ってまた T が対角行列で表現できることも分った。

5　射影子

これ以降 V は複素計量線型空間とする。

5.1　直交する部分空間の和

$W_i\ (1 \leqq i \leqq m)$ を V の部分空間とする。$\forall i \neq j$ で $W_i \perp W_j$ ならば

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i \qquad \text{（直和）}$$

である。
証明：
$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap \sum_{i=2}^{m} W_i$ とすると、$\boldsymbol{x} \in W_1$ かつ $\exists \boldsymbol{x}_i \in W_i\ (2 \leqq i \leqq m)$ で $\boldsymbol{x} = \sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{x}_i$ と書ける。$\forall i \neq 1$ で $W_i \perp W_1$ より $\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=2}^{m} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i) = 0$ よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから $W_1 \cap \sum_{i=2}^{m} W_i = \boldsymbol{0}$ である。
W_2 以下についても同様なので $\sum_{i=1}^{m} W_i = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ (直和) であることが分った。

5.2　射影子

W を複素計量線型空間 V の部分空間とする。W の直交補空間 $W^{\perp}$ を考えると $V = W \oplus W^{\perp}$ （直和）である。そこで 1 節と同様にこの直和分解に対して $P, P^{\perp}$ を作ることができる。P は W に関して一意的である。この P を W への**射影子**と呼ぶ。1 節の 1. によって射影子はベキ等変換である。そして 1 節の 4. によって射影子の固有値は 1 または 0 であり、P が固有値 1 を持てばその固有空間は W であり、固有値 0 を持てばその固有空間は $W^{\perp}$ である。特に固有値 1 および 0 を持つとき、固有値 1 に対する固有空間と固有値 0 に対する固有空間が直交することに注意せよ。

さらに以下に示すように射影子はエルミート変換である。
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とする。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$　但し $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W,\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W^{\perp}$ と書ける。
よって

$$(P(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (P(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1)$$

一方

$$(\boldsymbol{x}|P(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2|P(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}_1) = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}_1) = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1)$$

よって

$$(P(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|P(\boldsymbol{y}))$$

従って射影子はエルミート変換である。

5.3 複素計量線型空間の線型変換が射影子であるための必要十分条件

次が成り立つ。

$$T \text{ が射影子} \iff T \text{ はベキ等かつエルミート}$$

証明：

$\Longrightarrow$ は前節で示した。

$\Longleftarrow$ を示す。

T はベキ等なので 3 節の結果が使える。

1. の場合 $T = I$ は V への射影子であり、$V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ である。

2. の場合 $T = \boldsymbol{O}$ は $\{\mathbf{0}\}$ への射影子であり、$\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$ である。

3. の場合 $0, 1$ に対する T の固有空間を W_0, W_1 とすると $V = W_0 \oplus W_1$ （直和）であるが、T がエルミートだから $W_0 \perp W_1$ である。よって $W_0 \subset W_1^{\perp}$ だが、$\boldsymbol{x} \in W_1^{\perp}$ とするき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_0 \in W_0, \boldsymbol{x}_1 \in W_1)$ と置くと、$0 = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1) = \|\boldsymbol{x}_1\|^2$ より $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$ だから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \in W_0$ よって $W_0 = W_1^{\perp}$ となって、T が射影子であることが分った[*1]。

6 スペクトル分解

この節に関しては予備知識として資料「正規行列の対角化」の 3 節と 4 節を参照されたい。

V を有限次元複素計量線型空間、T を V の正規変換とする。T は適当な基底によって対角行列で表現できるので、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を T の異なる固有値のすべてとし、α_i に対する T の固有空間を W_i とすれば、$V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ （直和）である。

よって 4 節の記号を使うと

$$T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$$

と表せる。これを正規変換 T の**スペクトル分解**と呼ぶ。

T は正規変換だから $W_i \perp \bigoplus_{i \neq j} W_j$ なので、5.3 節の「3. の場合」と同じ理由で $W_i^{\perp} = \bigoplus_{i \neq j} W_j$ が分る。よって P_i は W_i への射影子である。α_i と W_i は T から一意的に定まるからこの表し方もその順序を除いて一意的である。なお、T がユニタリ変換 $\iff \forall \alpha_i$ について $|\alpha_i| = 1$、T がエルミート変換 $\iff \forall \alpha_i$ について α_i は実数、T が正値エルミート変換 $\iff \forall \alpha_i > 0$ に注意せよ。

ここで α_i と P_i は以下の条件を満たす（但し以下で P_i^* は P_i の随伴変換を表す）。

1. $P_i^2 = P_i$
2. $P_i P_j = 0$ 　（但し $i \neq j$）

[*1] 正値エルミート変換の固有値は正、特に 0 ではないから、以上によって射影子が正値エルミート変換になるのは、それが恒等変換になるときに限ることが分る。

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} P_i = I$ 　（但し I は恒等変換）
4. $P_i^* = P_i$
5. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ はすべて異なる複素数
6. $P_i \neq \boldsymbol{O}$

注意：条件 1. は 1 節に述べたように条件 2.3. から導かれる。また条件 6. は $P_i(V) = W_i \neq \{\mathbf{0}\}$ から分る（W_i が固有空間であることに注意)。

逆に 1.〜6.（上記注意に述べたように 2.〜6. でも OK）を満たす α_i と P_i が与えられている時

$$T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$$

とすれば、T は正規変換であり、$T = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ がそのスペクトル分解である。

実際 P_i はエルミート（条件 4.）であるから、$T^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} P_i$ （但し $\overline{\alpha_i}$ は α_i の共役複素数）であることに注意すれば $T^*T = TT^*$ が容易に分る。さらに 2 節と 4 節に述べたこと（条件 6. に注意）によって、α_i に対する T の固有空間が $P_i(V)$ であることが分り、先に述べた「順序を除いた一意性」によって、これは正規変換 T のスペクトル分解である。

7　正値エルミート変換とスペクトル分解

T を正値エルミート変換､$T = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ をそのスペクトル分解とする。$\alpha_i > 0$ に注意して $\sqrt{T} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha_i} P_i$ と置く。

$\sqrt{\alpha_i}$ と P_i は 6 節で述べた 1.〜6. の条件を満たし、さらに $\sqrt{\alpha_i} > 0$ なので、$\sqrt{T}$ も正値エルミート変換である。そして $\sqrt{T} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha_i} P_i$ が $\sqrt{T}$ のスペクトル分解である。また、$P_i^2 = P_i$ と $P_i P_j = 0$（但し $i \neq j$）に注意して計算すれば $(\sqrt{T})^2 = T$ が分る。

一方正値エルミート変換 S が $(S)^2 = T$ を満たすとして、そのスペクトル分解を

$$S = \sum_{i=1}^{l} \beta_i Q_i$$

と置くと、$T = S^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} (\beta_i)^2 Q_i$ であり、$(\beta_i)^2$ と Q_i は 6 節で述べた 1.〜6. の条件を満たすので、これは T のスペクトル分解である。スペクトル分解の一意性から、これは順序を除いて $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$ に一致する。よって $l = m$ であり、$(\beta_i)^2 = \alpha_i,\ Q_i = P_i$ として一般性を失わない。ここで $\beta_i > 0$ に注意すれば $\beta_i = \sqrt{\alpha_i}$ が分る。よって $S = \sqrt{T}$ となって、「平方して T になる」正値エルミート変換の一意性が分った[*2]。

[*2] 以上は資料 ” 正則な線型変換の「極表示」” 中で ” 正値エルミート変換の「平方根」” として述べた内容をスペクトル分解の立場から言い換えたに過ぎない。