平成２１年７月２７日　八起数学塾

一般の体上の２次形式

以下で $\boldsymbol{x} = (x_i)$（n 次列ベクトル）とする。また $P(i, j)$ でそれを左から掛けると、掛けられた行列の第 i 行と第 j 行とを交換する n 次の基本行列、$R(i, j; c)$ でそれを左から掛けると、掛けられた行列の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える n 次の基本行列を表すものとする。特に $R(i, j; 1)$ はそれを左から掛けると、掛けられた行列の第 i 行に第 j 行を加える n 次の基本行列である。

ここで $P(i, j)$ を右から掛けると、掛けられた行列の第 i 列と第 j 列が交換され、$R(i, j; c)$ を右から掛けると掛けられた行列の第 j 列に第 i 列（i, j の順序に注意）の c 倍が加えられる。

1　標数が 2 でない体上の２次形式を対称行列で表すこと

K をその標数が 2 ではない体とすると、以下が成り立つ。

（１）K の 2 次形式 $\sum_{ij} \alpha_{ij} x_i x_j$ は K の対称行列 A で ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ のように表せる。

（２）$A = (a_{ij})$ を K の対称行列とすると、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_i a_{ii} x_i^2 \iff A$ は対角行列　が成り立つ。

（１）は K の標数が 2 ではないので、$a_{ij} = 2^{-1}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$、$A = (a_{ij})$ と置けばよい。

（２）を示す。

$(\Longrightarrow)$

$A = (a_{ij})$ と置くと、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$ である。A が対称行列であることから、

$i \neq j$ に対して $0 = a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$、$K$ の標数は 2 でないので、$a_{ij} = a_{ji} = 0$

逆は明らかである。

注意：標数が 2 の場合はいかなる対称行列 $A = (a_{ij})$ についても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_i a_{ii} x_i^2$ となってしまう。

A, B が対角行列、M が正則行列で、$B = {}^tMAM$ とする。${}^tM$ も正則であることに注意すれば、

[A の対角成分で 0 でないものの個数] =rank$A$ =rank$B$ = [B の対角成分で 0 でないものの個数] であることが分かる。

このことと上記（１）（２）から、標数が 2 でない場合、$\sum_{ij} \alpha_{ij} x_i x_j$ の変数 $\{x_i\}$ を適当に斉１次変換して $\sum_i a_i X_i^2$ の形に表したとき（これが可能であることは 2.2 で示す）、0 でない a_i の個数は、斉１次変換の選び方によらず一定であることが分かる。しかし標数が 2 の場合は例えば $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ だから、$X = x, Y = y$ なら $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$、$X = x + y, Y = y$ なら $x^2 + y^2 = X^2$ から分かるように、これは成り立たない。

2　標数が 2 でない体上の２次形式の標準化

2.1　準備

$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix}$ をブロック分けされた正方行列とする。A が正則（従ってもちろん正方行列）ならば、

別資料「正値エルミート行列とアダマールの不等式」で述べたように等式

$$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ B_2A^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & C - B_2A^{-1}B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A^{-1}B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B_2A^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & C - B_2A^{-1}B_1 \end{pmatrix}$$

である。

注意：ここで

$$\begin{pmatrix} E_n & A^{-1}B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix}$$

であることは計算で容易に分るが、次のことと関連付けておけば見やすいであろう。

$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 2 次の基本行列 $R(1,2;c)$ であるが、この基本行列の意味を考えれば、

その逆行列が $R(1,2;-c) = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることは明らかである。

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ B_2A^{-1} & E_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B_2A^{-1} & E_m \end{pmatrix}$$

についても $R(2,1;c)^{-1} = R(2,1;-c)$ より同様である。

特に $\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix}$ が対称行列である場合を考えると、${}^tA = A, {}^tB_1 = B_2, {}^tC = C$ より、

$C - B_2A^{-1}B_1$ は対称行列であり、さらに ${}^t\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B_2A^{-1} & E_m \end{pmatrix}$ となることに注意せよ。

2.2　主張

K を標数が 2 でない体とし、A を K の要素を成分とする n 次対称行列とする。この時 ${}^tMAM$ が対角行列になるような n 次正則行列 M が存在する。

証明：
帰納法による。A が 1 次なら何も示すことはない。$n > 1$ 次として、$n-1$ 次以下では正しいものとする。
$A = (a_{ij})$ と置く。2.1 より、$a_{11} \neq 0$ であれば適当な正則行列 M_1 を使って

$$ {}^tM_1AM_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} $$

とできる。
ここで Γ は対称行列であるから帰納法の仮定によって、適当な（$n-1$ 次）正則行列 M' が存在して、${}^tM'\Gamma M'$ が対角行列になるようにできる。

$$ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} $$

と置けば、M_2 は正則であり、

$$ {}^t(M_1M_2)A(M_1M_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & {}^tM'\Gamma M' \end{pmatrix} $$

となって主張が示される。
$a_{11} = 0$ の場合を考える。
$A = O$ ならば主張は正しいから、$A \neq O$ として良い。
まず A の対角成分に 0 で無いものが有るとして、それを a_{kk} とする。この場合 ${}^tP(k,1)AP(k,1)$ を考えると、これの $(1,1)$ 成分は a_{kk} になって、結局 $(1,1)$ 成分が 0 で無い場合に帰着する。
次に A の対角成分がすべて 0 の場合を考える。a_{ij} $(i \neq j)$ の中に 0 で無いものが有るから、それを a_{kl} とする。A の対称性から $a_{kl} = a_{lk}$ に注意して ${}^tR(l,k;1)AR(l,k;1)$ を考えると、これの (k,k) 成分が $2a_{kl}$ になる。体の標数が 2 ではないから、$2a_{kl} \neq 0$。よって対角成分に 0 で無いものが有る場合に帰着する。
証明終わり。
注意：${}^tP(i,j) = P(j,i) = P(i,j)$ また ${}^tR(i,j;c) = R(j,i;c)$ である。

3　標数 2 の場合の注意

K を標数 2 の体とし、x, y を不定元とする。$b \neq 0$ とすると、斉一次変換

$$ \begin{cases} X = \alpha x + \beta y \\ Y = \gamma x + \delta y \end{cases} $$

によって $ax^2 + bxy + cy^2$ を $sX^2 + tY^2$ の形に表すことはできない。

証明：
そのように表せたとすると、標数 2 なので

$$ ax^2 + bxy + cy^2 = s(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2) + t(\gamma^2x^2 + \delta^2y^2) $$

これを整理すると

$$ (a + s\alpha^2 + t\gamma^2)x^2 + bxy + (c + s\beta^2 + t\delta^2)y^2 = 0 $$

であるが、これは $b \neq 0$ に反する。