平成２１年７月２日　八起数学塾

三角行列

1　三角行列とは

以下で行列は全て正方行列とする。

下の左の形の行列を上三角行列、右の形の行列を下三角行列と呼び、上又は下三角行列の事をまとめて単に三角行列と呼ぶ。(a_{11} 及び$*$の部分はどのような数（考察している体の元）が入っても構わない。)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \Large * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \Large 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \Large * & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ここから先は上三角行列について述べるが、以下の「$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_k\}$ が W_k を生成する」となっている基底の取り方を、「$\{\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$ が W_k を生成する」と変更すれば、これは下三角行列の話としてそのまま通用する。

2　上三角行列の性質

上三角行列については以下の性質がある。

1. 上三角行列と上三角行列の和や積は上三角行列である。
2. A を n 次の上三角行列とし、$a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ をその対角成分とすれば、
   $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$（対角成分の積）である。
3. 上三角行列が正則 $\Longleftrightarrow$ その対角成分には零が現れない。
4. 上三角行列の対角成分はその上三角行列の固有値である。
5. 上三角行列の余因子行列は上三角行列である。特に上三角行列が逆行列を持てば（つまり正則なら)、その逆行列も上三角行列である。

上記の 1. は簡単に確かめられる。また 2. も行列式の定義に戻って計算すれば分る。3. は 2. から直ちに分り、4. は上三角行列 $\lambda E - A$ に 2. を使えば A の固有多項式 $=\det(\lambda E - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\ldots(\lambda - a_{nn})$ となる事から分る。5. は余因子行列の定義から分る。（具体的に３次や４次の上三角行列で、その (i, j) 余因子がどうなるか調べて見ればすぐ納得できる。）なお正則な場合については、次のようにしても分る。

A を正則な上三角行列として $A^{-1} = B + C$ 但し B は上三角行列、C は対角成分がすべて 0 の下三角行列と置く（明らかにどんな行列でもこの様に分解できる)。$E = (B + C)A = BA + CA$ で BA が上三角行列であることと、A の対角成分が 0 ではないことに注意して CA を考察すれば $C = 0$ が分る。これも３次や４次の行列で具体的に計算してみると納得できるはずである。

3　上三角行列と線型部分空間

K を体、$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n >$ を K^n の標準基底とし、$A = (a_{ij})$ を上三角行列とする。
$A\boldsymbol{e}_k = a_{1k}\boldsymbol{e}_1 + a_{2k}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{kk}\boldsymbol{e}_k$ であるから、W_k を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_k\}$ で生成される K^n の線型部分空間とし、T を A に対応する K^n の線型変換とすると、W_k は T 不変である事が分る。また W_k の作り方から、$\mathbf{0} \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{n-1} \subsetneqq W_n = K^n$ となっていることが分る。($< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n >$ が基底であることに注意。)

逆に V を K 上の n 次元ベクトル空間、T を V の線型変換とし、T 不変な部分空間の列 $\mathbf{0} \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{n-1} \subsetneqq W_n = V$ が存在すれば、適当な基底を取ることで、T は上三角行列として表わせる。実際 $\dim W_1 = 1$(一般に $\dim W_k = k$)に注意して、まず W_1 の $\mathbf{0}$ でないベクトルを一つ取って固定し、それを $\boldsymbol{e}_1$ とする。$< \boldsymbol{e}_1 >$ は W_1 の基底である。次いでこの基底を延長し、W_2 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >$ を作る。以下同様にして V の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots \boldsymbol{e}_n >$ を作れば、これが求めるものである。

4　三角化定理

4.1　準備

まず準備として、一般に次が成り立つことに注意する。
M を線型空間、N をその線型部分空間として、自然な写像 $f : M \longrightarrow M/N$ を考える。W を N を含む M の線型部分空間とすると $f(W)$ は M/N の線型部分空間であり、$f^{-1}f(W) = W$ が成り立つ。実際前半は $\alpha, \beta \in K, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}} \in f(W)$ とすると、$\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ で $\bar{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \bar{\boldsymbol{y}} = f(\boldsymbol{y})$ より $\alpha\bar{\boldsymbol{x}} + \beta\bar{\boldsymbol{y}} = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \in f(W)$ から分り、後半は $f^{-1}f(W) \supset W$ は当然だから $f^{-1}f(W) \subset W$ を示せばよいが、$\boldsymbol{x} \in f^{-1}f(W)$ とすると $f(\boldsymbol{x}) \in f(W)$ より、$\exists \boldsymbol{y} \in W$ で $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ よって $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in N$ だが、$N \subset W$ だから $\boldsymbol{x} \in W$。よって $f^{-1}f(W) \subset W$ となって成り立つ。従って N を含む M の線型部分空間と M/N の線型部分空間との間に 1 対 1 の対応関係がある。

4.2　三角化定理

K を代数閉体とする。K 上の有限次元ベクトル空間の線型変換は適当な基底を取れば上三角行列で表せる。

証明:
T を K 上の n 次元ベクトル空間 V の線型変換として、3 節で述べた T 不変な部分空間の列が存在する事を言えばよい。

帰納法による。$n = 1$ の場合は明白であるから、$n \geqq 2$ としてとして、$n - 1$ までは主張が正しいものする。

T の固有ベクトルを一つ取って固定し、それが生成する空間を L として商空間 V/L を考える。L は T 不変だから、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in L$ なら $T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \in L$ が成り立つ。よって $\boldsymbol{x} \in V$ の V/L での同値類を $\bar{\boldsymbol{x}}$ とする時、$\overline{T}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \overline{T(\boldsymbol{x})}$ とすれば $\overline{T}$ は V/L の線型変換である(well-defined)。$\dim V/L = \dim V - \dim L = n - 1$ であるから帰納法の仮定によって $\overline{T}$ 不変な部分空間の列 $\mathbf{0} \subsetneqq \overline{W}_1 \subsetneqq \overline{W}_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \overline{W}_{n-2} \subsetneqq \overline{W}_{n-1} = V/L$ が存在する。ここで $\overline{W}_0 = \mathbf{0}$ と置き、さらに V/L の部分空間 $\overline{W}_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ に対応する L を含む V の部分空間を W_{k+1} と置く。このようにすれば先に述べた注意によって、$\mathbf{0} \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{n-1} \subsetneqq W_n = V$ が分るので、あとは W_{k+1} が T 不変であることを

示せばよい。

$\boldsymbol{x} \in W_{k+1}$ ならば $\bar{\boldsymbol{x}} \in \overline{W}_k$ なので $\overline{T(\boldsymbol{x})} = \overline{T}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in \overline{W}_k$ である。よって $T(\boldsymbol{x}) \in W_{k+1}$ つまり W_{k+1} は T 不変である。

5 交換可能な線型変換を同時に上三角行列で表すこと

K を代数閉体とする。K 上の有限次元ベクトル空間の 2 つの交換可能な線型変換は、適当な基底によって同時に上三角行列で表すことができる。

証明：

T, S を K 上の n 次元ベクトル空間 V の交換可能（$TS = ST$）な線型変換として、T 不変かつ S 不変な部分空間の列 $\mathbf{0} \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{n-1} \subsetneqq W_n = V$ が存在することを示せばよい。

この主張が $n = 1$ の場合に正しいことは明らかである。従って T と S が共通の固有ベクトルを持つことを示し、それが生成する空間を L とすれば、$\overline{T}\,\overline{S} = \overline{S}\,\overline{T}$ は容易に分るので、あとは 4.2 と全く同じ帰納法により証明が完成する。

T の固有値 α を一つ取って固定し、α の固有空間を W とする。$\boldsymbol{x} \in W$ とすると、$T(S(\boldsymbol{x})) = S(T(\boldsymbol{x})) = S(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha S(\boldsymbol{x})$ ゆえに $S(\boldsymbol{x}) \in W$。よって W は S 不変である。そこで $S|W$（S を W に制限したもの）の固有ベクトル（もちろん W の元）を考えればこれが求めるものである。

6 補足

基礎体が複素数体で、そのベクトル空間にエルミート積が定義されている場合は、三角化定理を帰納法で証明する際に商空間 V/L を考える代りに次のようにしてもよい。

α を T の随伴変換 T^* の固有値、$\boldsymbol{a}$ をそれに対応する固有ベクトルとして、$W = \{\boldsymbol{x} \in V | (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = 0\}$ と置く。W は $\boldsymbol{a}$ が生成する部分空間（1 次元）の直交補空間であるから $\mathrm{dim}W = n - 1$ である。また $\boldsymbol{x} \in W$ とすると、$(\boldsymbol{a}|T(\boldsymbol{x})) = (T^*(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}) = (\alpha \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = 0$。よって W は T 不変である。そこで $n-1$ 次元空間 W と W の線型変換 $T|W$ に対して帰納法の仮定を適用すれば、$T|W$ 不変な W の部分空間の列が得られる。いうまでもなく、$T|W$ 不変な W の部分空間は T 不変な V の部分空間であるから、この列の最後に V を付け加えれば所望の部分空間列を得る。「交換可能な線型変換を同時に上三角行列で表すこと」についても $TS = ST$ なら $T^*S^* = (ST)^* = (TS)^* = S^*T^*$ に注意して $\boldsymbol{a}$ を T^* と S^* の共通な固有ベクトルにとればよい。

注意：上記の固有ベクトル「$\boldsymbol{a}$」を帰納法の各段階で取り、それらを集めれば V の直交基底が得られる。各「$\boldsymbol{a}$」の長さは 0 でない限り任意に設定できるから、特にすべて 1 に取れば正規直交基底が得られる。よって複素計量線型空間の線型変換は適当な正規直交基底によって上三角行列として表現できることが分る。同様に複素計量線型空間の交換可能な 2 つの線型変換は適当な正規直交基底によって同時に上三角行列として表現できることが分る。

なお、3 節の基底の作り方にシュミットの直交化法を加味することによっても正規直交基底の存在は示せる。（これについては別資料「正規行列の対角化」参照。）