平成２５年１２月１７日　表現の一部とタイプミスを訂正　八起数学塾

固有空間について

1　固有値と線型独立性

V を線型空間、T を V の線型変換、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を T の相異なる固有値、$\boldsymbol{x}_i$ を固有値 α_i に関する固有ベクトルとすると、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は線型独立である。
証明：
m についての帰納法による
$m = 1$ なら正しい、$m > 1$ として、$m - 1$ までは正しいものとする。

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} =& \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i - T(\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{x}_i) \\
=& \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 a_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{m} a_i T(\boldsymbol{x}_i) \\
=& \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 a_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \boldsymbol{x}_i \\
=& \sum_{i=1}^{m} (\alpha_1 - \alpha_i) a_i \boldsymbol{x}_i \\
=& \sum_{i=2}^{m} (\alpha_1 - \alpha_i) a_i \boldsymbol{x}_i
\end{aligned}$$

であるから、帰納法の仮定によって、$(\alpha_1 - \alpha_i) a_i = 0 \; (2 \leqq i \leqq m)$ である。また、$\alpha_1 - \alpha_i \neq 0$ なので、$a_i = 0 \; (2 \leqq i \leqq m)$ が成り立つ。これを始めの式に代入すると $a_1 \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$。
ここで $\boldsymbol{x}_1$ は固有ベクトルなので $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ だから、$a_1 = 0$ 従って $a_i = 0 \; (1 \leqq i \leqq m)$ であり、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は線型独立である。

2　対角化の必要十分条件

K を体、V を K の n 次元ベクトル空間、T を V 上の線型変換とする。

T は適当な基底によって対角行列で表せる。$\Longleftrightarrow$ V は T の固有空間の直和である。
証明：
$(\Longrightarrow)$
$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n >$ を V の基底とし、この基底によって T が対角行列で表せるものとする。この基底による

線型同型写像 $V \longrightarrow K^n$ を φ とする。以下の可換図式ができる。

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{T} & V \\
{\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\
K^n & \longrightarrow & K^n
\end{array}
$$

$\varphi T \varphi^{-1}$ を行列表示すると、対角行列である。この対角行列の (i,i) 成分を α_i とする。$\alpha_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ が T の固有値のすべてであることと、$\boldsymbol{e}_i$ が α_i に関する固有ベクトルであることに注意する。

$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_m}$ を T の異なる固有値のすべてとする。固有値 α_{k_j} に関する固有ベクトルであるすべての $\boldsymbol{e}_i$ で生成される V の線型部分空間を W_{k_j} と置く。

このようにすれば、$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n >$ が V の基底であることと、上に述べた注意によって

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_{k_j}(\text{直和})$$

が分る。後は W_{k_j} が固有値 α_{k_j} に対する固有空間であることを示せばよい。

W_{k_j} が固有値 α_{k_j} に対する固有空間に含まれることは明らかである。$\boldsymbol{x}$ を固有値 α_{k_j} に関する T の固有ベクトルとして、$\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$ 但し $\boldsymbol{x}_i \in W_{k_i}$ と置く。

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_j} \boldsymbol{x}_i = \alpha_{k_j} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i = T(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} T(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} \boldsymbol{x}_i$$

であるから、表し方の一意性によって $\alpha_{k_i} \boldsymbol{x}_i = \alpha_{k_j} \boldsymbol{x}_i$ となるが、$i \neq j$ なら $\alpha_{k_i} \neq \alpha_{k_j}$ なので、$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}\,(i \neq j)$ よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_j \in W_{k_j}$ 従って W_{k_j} は固有値 α_{k_j} に対する固有空間である。

$(\Longleftarrow)$

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i(\text{直和}) \qquad \text{しかも } W_i \text{は } T \text{ の固有空間}$$

とする。

直和の定義に注意せよ。各 W_i について基底を一つずつ取って、それらを集めれば、それは V の基底になる。この基底で T が対角行列として表されることは明らかである。

3　エルミート変換の固有空間

エルミート変換の異なる固有値に対する固有空間は直交する。

つまり T を複素計量線型空間 V のエルミート変換、$\alpha \neq \beta$ を T の固有値、W_α, W_β をそれぞれ α, β に関する T の固有空間とすれば、$W_\alpha \perp W_\beta$ である。

証明：

T はエルミート変換であるから、α, β が実数であることに注意する。$\boldsymbol{x} \in W_\alpha, \boldsymbol{y} \in W_\beta$ とすると

$$\alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}|\beta\boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

ところが $\alpha \neq \beta$ なので $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$、つまり $W_\alpha \perp W_\beta$ である。