平成２１年6月１２日　八起数学塾

環準同型が誘導する代数的集合間の写像

1　整拡大と素イデアル

定理 1.1.
環準同型 $\varphi : A \to B$ が整的であるとき、φ から誘導される写像 $\varphi^* : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ について以下が成り立つ。

1. $\mathfrak{n} \in \text{m-Spec}\, B \Longleftrightarrow \varphi^* (\mathfrak{n}) \in \text{m-Spec}\, A$。
2. φ が単射なら φ^* は全射である。ここで $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ に対して $\mathfrak{p} = \varphi^* (\mathfrak{q})$ を満たす $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}B$ を $\mathfrak{p}$ の上にある B の素イデアルと呼ぶ。１．によって極大イデアルの上にある素イデアルは極大イデアルである。

証明.
１の証明
$A/\varphi^* (\mathfrak{n}) \to B/\mathfrak{n}$ は整域の埋め込みであり、しかも整的だから、$B/\mathfrak{n}$ が体 $\Longleftrightarrow$ $A/\varphi^* (\mathfrak{n})$ が体。よって
$\mathfrak{n} \in \text{m-Spec}\, B \Longleftrightarrow \varphi^* (\mathfrak{n}) \in \text{m-Spec}\, A$。
２の証明
A が零環なら $\varphi (1) = 1$ に注意すれば B も零環でなくてはならず、$\mathrm{Spec}A = \mathrm{Spec}B = \emptyset$ なので、この場合は（意味はないが）正しい。
A は零環ではないとする。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ として以下の可換な図式を考える。ここでもちろん $A_\mathfrak{p}$ も零環ではない。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "g"] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, "\psi"'] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

φ が単射なので、局所化の完全性から、ψ も単射である。よって $B_\mathfrak{p}$ も零環ではなく、$B_\mathfrak{p}$ には極大イデアルが存在するので、それを１つ取って固定し、$\mathfrak{n}$ とする。１．によって $\psi^{-1} (\mathfrak{n}) = \psi^* (\mathfrak{n})$ は $A_\mathfrak{p}$ の極大イデアルであり、$A_\mathfrak{p}$ は局所環だから、$\psi^{-1} (\mathfrak{n}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ である。よって $\mathfrak{p} = f^{-1} (\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = f^{-1}\psi^{-1} (\mathfrak{n}) = \varphi^{-1}g^{-1} (\mathfrak{n}) = \varphi^* g^* (\mathfrak{n})$。ここで $g^* (\mathfrak{n}) \in \mathrm{Spec}B$ だから φ^* は全射である。

Q.E.D.

注意 1.2.
蛇足として付け加えておくと、以上から整的な環準同型 $\varphi : A \to B$ に関して

1. $\varphi^* (\mathrm{Spec}B) = V (\mathrm{Ker}\varphi)$
2. $\varphi^{*-1} (V (\mathrm{Ker}\varphi) \cap \text{m-Spec}\, A) = \text{m-Spec}\, B$

が成り立つことが分る。

2　環準同型が誘導する代数的集合間の写像

命題 2.1.

k を体、x_i, y_j を不定元、$\varphi : k\left[x_1, \ldots, x_m\right] \to k\left[y_1, \ldots, y_n\right]$ を環準同型、$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ をそれぞれ多項式環 $k\left[x_1, \ldots, x_m\right], k\left[y_1, \ldots, y_n\right]$ のイデアルで、$\varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ となっているものとする。

1. φ から自然に写像 $\varphi^{\#} : Z(\mathfrak{b}) \to Z(\mathfrak{a})$ が定まる。
2. k が代数閉体で $\bar{\varphi} : k\left[x_1, \ldots, x_m\right]/\mathfrak{a} \to k\left[y_1, \ldots, y_n\right]/\mathfrak{b}$ が単射かつ整ならば、$\varphi^{\#}$ は全射である。
   ($\bar{\varphi}$が単射 $\Longleftrightarrow \mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ に注意。)

証明.

1．の説明

$\varphi(x_i) = g_i(y_1, \ldots, y_n)$ とする。$f \in \mathfrak{a}$ に対して
$f\left(g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n)\right) = f\left(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)\right) = (\varphi f)(y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{b}$ より、
$(b_1, \ldots, b_n) \in Z(\mathfrak{b})$ ならば $f\left(g_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, (b_1, \ldots, b_n)\right) = (\varphi f)(b_1, \ldots, b_n) = 0$
従って $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto \left(g_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, (b_1, \ldots, b_n)\right)$ によって写像 $Z(\mathfrak{b}) \to Z(\mathfrak{a})$ を定めることができるので、それを $\varphi^{\#}$ とすれば良い。

2．の証明

まず一般に次の 2 点が成り立つことに注意しておく。

1. $(a_1, \ldots, a_m) \in Z(\mathfrak{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{a} \subset (x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)$
2. $(a_1, \ldots, a_m) \in k^m$ を $f \in k\left[x_1, \ldots, x_m\right]$ に代入することと、
   自然な準同型写像 $k\left[x_1, \ldots, x_m\right] \to k\left[x_1, \ldots, x_m\right]/(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m) \simeq k$ によって、f を k の要素に対応させることは同じである。

$(a_1, \ldots, a_m) \in Z(\mathfrak{a})$ とすると、$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)$ は $\mathfrak{a}$ を含む $k\left[x_1, \ldots, x_m\right]$ の極大イデアルであり、これに対応する $k\left[x_1, \ldots, x_m\right]/\mathfrak{a}$ のイデアル $\bar{\mathfrak{m}}$ も極大である。$\bar{\varphi}$ は単射かつ整だから、定理 1.1 によって $\bar{\mathfrak{m}}$ の上にある $k\left[y_1, \ldots, y_n\right]/\mathfrak{b}$ の極大イデアル $\bar{\mathfrak{n}}$ が存在する。$\bar{\mathfrak{n}}$ に対応する $k\left[y_1, \ldots, y_n\right]$ のイデアルを $\mathfrak{n}$ とすれば、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{b}$ を含む極大イデアルであり、さらに $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ が容易に分る。よって以下の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd}
k\left[x_1, \ldots, x_m\right] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & k\left[y_1, \ldots, y_n\right] \arrow[d, "\tau"] \\
k \simeq k\left[x_1, \ldots, x_m\right]/\mathfrak{m} \arrow[r, "\psi"'] & k\left[y_1, \ldots, y_n\right]/\mathfrak{n}
\end{tikzcd}$$

ここで $\bar{\varphi}$ が整だから、ψ も整であり、従って $k\left[y_1, \ldots, y_n\right]/\mathfrak{n}$ は k の代数拡大体である。ところが k は代数閉体だから、$k\left[y_1, \ldots, y_n\right]/\mathfrak{n} \simeq k$ が成り立つ。$\tau(y_j) = b_j \in k$ と置いて、イデアル $(y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n)$ を考えると、これは $y_j - b_j \in \mathfrak{n}$ より $\mathfrak{n}$ に含まれるが、イデアル $(y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n)$ は極大なので、$\mathfrak{n} = (y_1 - b_1, \ldots, y_n - b_n)$ が分る。$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$ だから $(b_1, \ldots, b_n) \in Z(\mathfrak{b})$ であり、
さらに $a_i = \psi(a_i) = \psi\sigma(x_i) = \tau\varphi(x_i) = \tau\left(g_i(y_1, \ldots, y_n)\right) = g_i\left(\tau(y_1), \ldots, \tau(y_n)\right) = g_i(b_1, \ldots, b_n)$ だか

ら $\varphi^{\#}$ が全射であることが示された。

Q.E.D.

注意 2.2.

命題 2.1 とネーターの正規化定理からヒルベルトの零点定理の弱形が直ちに導かれる。

$\mathfrak{b} \neq (1)$ なら $k[y_1, \ldots, y_n]/\mathfrak{b}$ は、零環ではない k の有限生成代数だから、ネーターの正規化定理によって、$\bar{\varphi} : k[x_1, \ldots, x_m] \hookrightarrow k[y_1, \ldots, y_n]/\mathfrak{b}$ が整拡大になるように、k 上代数的に独立な $x_1, \ldots, x_m \in k[y_1, \ldots, y_n]/\mathfrak{b}$ が取れる。ここで適当な $g_i \in k[y_1, \ldots, y_n]$ があって、$\bar{\varphi}(x_i) = g_i(y_1, \ldots, y_n) + \mathfrak{b}$ と書けることに注意して $g_1, \ldots, g_m$ を固定する。

まず $m \neq 0$ とする。$k[x_1, \ldots, x_m]$ は k 上の多項式環（に同型）だから、$\varphi(x_i) = g_i(y_1, \ldots, y_n)$ として、環準同型 $\varphi : k[x_1, \ldots, x_m] \to k[y_1, \ldots, y_n]$ を定めることができる。$\mathfrak{a} = (0)$ と置けば、明らかに $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ であって、$\bar{\varphi}$ は φ から自然に定まる環準同型 $k[x_1, \ldots, x_m]/\mathfrak{a} \to k[y_1, \ldots, y_n]/\mathfrak{b}$ と同一視できる。従って命題 2.1 により、k が代数閉体ならば $Z(\mathfrak{b}) \to Z(\mathfrak{a})$ は全射である。さらに $Z(\mathfrak{a}) = k^m \neq \emptyset$ であるから、$Z(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ でなくてはならない。なおネーターの正規化定理の証明から、k が無限体の場合には $Z(\mathfrak{b}) \to Z(\mathfrak{a})$ を線型写像に取れることが分る。

$m = 0$ とする。不定元 x を別途用意し、$\varphi(x) = 0$ として環準同型 $\varphi : k[x] \to k[y_1, \ldots, y_n]$ を考え $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ と置けば、$\mathrm{Ker}(\varphi) = (x)$ より $Z(\mathfrak{a}) = \{0\} \neq \emptyset$ が分る。これ以外は $m \neq 0$ の場合と同様にして $Z(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ が示される。