平成２１年5月１３日　八起数学塾

ハミルトン・ケイリーの定理の応用

以下では n を固定し、n 次正方行列を単に行列と呼ぶ。

1　逆行列

「逆行列はもとの行列の多項式で表せる。」

A を正則行列として、A の固有多項式を $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ とする。
ここで $a_0 = (-1)^n \mathrm{det}(A)$ であるが、A が正則であるから $a_0 \neq 0$ である。
またハミルトン・ケイリーの定理から

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0$$

よって

$$-a_0^{-1}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1)A = E$$

従って

$$A^{-1} = -a_0^{-1}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1)$$

である。

2　ベキ零行列

「行列 A がベキ零であることと A の固有値がすべて 0 であることとは同値である。」

A がベキ零ならば A の固有値はすべて 0 であることを示す。
A の固有値を任意に選んでそれを α とし、$\boldsymbol{x}$ を α に関する A の固有ベクトルとする。
A がベキ零であれば $A^m = O$ となる m がある。
一方

$$A^m\boldsymbol{x} = A^{m-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{m-1}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A^{m-1}\boldsymbol{x} = \alpha^2 A^{m-2}\boldsymbol{x} = \cdots = \alpha^{m-1}A\boldsymbol{x} = \alpha^m\boldsymbol{x}$$

だから $\alpha^m\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるが、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\alpha^m = 0$、よって $\alpha = 0$ である。

A の固有値がすべて 0 ならば A はベキ零であることを示す。
A の固有多項式は $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$（但し α_i は A の固有値）という形に分解されるが、すべての i について $\alpha_i = 0$ であるから、A の固有多項式は x^n である。従ってハミルトン・ケイリーの定理によって $A^n = O$ が成り立つ。
証明終わり。