平成２１年5月１３日　八起数学塾

コーシーの積分公式の導き方

コーシーの積分公式を忘れてしまった場合、以下のようにすれば導き出せる。

なお、以下では D を複素平面上の単連結領域、$f(z)$ を D 上の正則関数、α を D の点、C を点 α の周りを反時計回りに一周する D 内の閉曲線とする。

予備知識として以下を使う。

1. コーシーの積分定理
2. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = 2\pi i$
3. $f(z)$ は α の近傍でベキ級数に展開できる
4. ベキ級数はその収束半径内で項別に積分できる
5. ベキ級数はその収束半径内で正則である

まず３．によって $f(z)$ を点 $\alpha \in D$ の近傍で冪級数展開する

$$f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + a_3(z-\alpha)^3 + \cdots$$

この両辺を $z-\alpha$ で割ると

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = \frac{a_0}{z-\alpha} + a_1 + a_2(z-\alpha) + a_3(z-\alpha)^2 + \cdots$$

ここで $a_0 = f(\alpha)$ に注意。

C' を点 α の周りを反時計回りに一周するこの近傍内の閉曲線として、この両辺を $\displaystyle\int_{C'} dz$ で積分すると

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_{C'} \frac{a_0}{z-\alpha}dz + \int_{C'} a_1 dz + \int_{C'} a_2(z-\alpha)dz + \cdots$$

あるいは

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_{C'} \frac{a_0}{z-\alpha}dz + \int_{C'} a_1 + a_2(z-\alpha)a_3 + (z-\alpha)^2 + \cdots dz$$

よって１．と４．あるいは５．から

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_{C'} \frac{a_0}{z-\alpha}dz$$

よって２．から

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = 2\pi i a_0 = 2\pi i f(\alpha)$$

最後に $\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ が $D-\{\alpha\}$ で正則であることと C と C' が $D-\{\alpha\}$ でホモトープであることから、1．によって

$$\int_{C} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = 2\pi i f(\alpha)$$

よって

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

これでコーシーの積分公式が得られた。

注意１：領域上の正則関数の局所的ベキ級数展開の存在は、通常コーシーの積分公式を使って証明する。従って（局所的ベキ級数展開の存在を別の方法で証明しない限り）上記はコーシーの積分公式を証明するものではない。

注意２：上記２．は適当な $\epsilon > 0$ をとって円盤 $\{z|z \leqq \epsilon e^{it} + \alpha(0 \leq t \leq 2\pi)\}$ が D に含まれるようにすれば（D は開集合だからできる）、

$$\int_{z=\epsilon e^{it}+\alpha(0\leq t\leq 2\pi)} \frac{1}{z-\alpha}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}}\frac{d(\epsilon e^{it}+\alpha)}{dt}dt = i\int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

となり、$\dfrac{1}{z-\alpha}$ が $D-\{\alpha\}$ で正則であることと C と $\epsilon e^{it} + \alpha(0 \leq t \leq 2\pi)$ が $D-\{\alpha\}$ でホモトープであることから、1．によってわかる。