平成２１年5月１３日　八起数学塾

固有ベクトルと対角化

以下のように考えると固有ベクトルと対角化の関係は明白である。

まず対角行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ を考える。

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ とすると

$A\boldsymbol{e_i} = a_{ii}\ (1 \leq i \leq n)$ だから、$\boldsymbol{e_i}$ が固有ベクトルで、a_{ii} がそれに対応する固有値になってる。

つまり対角行列では、対角成分が固有値で、標準基底のベクトルが固有ベクトルになっている。

このように対角行列の側から固有値と固有ベクトルを考えれば、固有値および固有ベクトルと対角化との関係は明白（以下の注意も参照）である。

注意：P を正則行列とするとき $P^{-1}AP$ と A は同一の線型変換を異なる基底により行列表現したものと見ることができる。