平成２１年９月３日　八起数学塾

SIN の因数分解と逆２乗の和

1　この資料の内容について

ここでは天才オイラーの発見的推論の一つを紹介する。ここで「発見的推論」としたのは、以下の議論は現在の数学からすればそのままでは正しいものではなく、さらにオイラー自身も問題ありとして、後日別の説明を試みているからである。しかしながら、この議論は簡明でありながら、その結果の深さと、なによりもオイラーの天才的な発想が手軽に味わえるという意味においてとりわけ秀逸だと思われる。

2　$\sin x$ の「因数分解」

$\sin x$ が $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$　という形にベキ級数展開されることは周知の事実である。オイラーはこのベキ級数展開を**「無限次の多項式」**と解釈する。よって $\sin x$ は無限次の多項式である。
多項式であれば因数分解を考えることができる。そして因数分解するためには $\sin x = 0$ の解を考えればよい。$\sin x = 0$ の解は $x = n\pi$（n は整数）である（$\sin x = 0$ の解が実数のみであることの証明が必要だが割愛する）。よって有限次の因数分解に習えば、$\sin x = a \prod_{n\text{ は整数}} (x - n\pi) = ax \prod_{n\text{ は正整数}} \left(x^2 - n^2\pi^2\right)$ である。しかしこの式には問題がある。有限次ならば a は最高次の項の係数であるが、今回は無限次なので、そのような考えは都合が悪い。そこで最低次の項に着目する。そうすると $x = a\left(\prod_{n\text{ は正整数}} \left(-n^2\pi^2\right)\right)x$ である。ここから $a = \prod_{n\text{ は正整数}} \left(-n^{-2}\pi^{-2}\right)$ もちろんこれは無茶な式だが、各因数 $-n^{-2}\pi^{-2}$ をそれぞれ因数 $x^2 - n^2\pi^2$ に振り分けてしまえば $\sin x = x \prod_{n\text{ は正整数}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$[*1]となって、現在の数学の立場から見ても正しい等式に到達する。なおこの等式は $\sin x$ の「因数分解」とは呼ばないで、$\sin x$ の**無限積展開**と呼ぶ。

3　逆２乗の和

前節で等式　$x \prod_{n\text{ は正整数}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!} + \cdots$　を得た。この等式の左辺を展開して、x^3 の係数を比較すると。

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{3!}$$

結局

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

という見事な結果が得られた。

[*1] $\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ とまとめてあるのがポイントである。これにより無限積 $\prod_{n\text{ は正整数}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ の収束が保障される。

4　$\sin x$ の無限積展開の厳密な証明について

$\sin x$ の無限積展開の厳密な証明について知りたい人のために参考書をあげておく。

1. 解析概論（高木貞治著岩波書店）第５章 64 の $\left(3^\circ\right)$
2. 複素関数三幕劇（難波誠著すうかくぶっくす１０朝倉書店）命題 2.14.8

いずれも $\cot x$ の「部分分数分解」を利用した証明である。なお１．は $\cot x$ の「部分分数分解」を求めるために留数定理を使い、２．はリュービルの定理を使っている。引き算をして極を除去すれば整関数になるという後者の証明の方がこの点に関しては直感的で分りやすいように思う。