平成２１年１１月１６日　八起数学塾

中間値の定理

以下実数を $\mathbb{R}$ で表す。

1　区間縮小法

1.1　閉区間の縮小列

$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ とするとき、集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ を閉区間といい、記号 $[a,\ b]$ で表す。

ここで表現の簡易化のため、以下の２条件を満たすとき、閉区間の列 $\{[a_n,\ b_n]\}\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は縮小列であると呼ぶことにする。

1. $[a_k,\ b_k] \supset [a_{k+1},\ b_{k+1}]\ \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$
2. $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} (b_k - a_k) = 0$

1.2　実数の性質

閉区間の列 $\{[a_n,\ b_n]\}\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が縮小列であるとする。このときこの縮小列に対して $c \in \displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} [a_k,\ b_k]$ となる実数 c が唯一つ存在する。これは実数の完備性と呼ばれ、コーシー列が収束する等の条件と同値であるが、この資料ではその説明はせず、単にこれは実数の性質であると考えることにする。この性質を利用して実数に関しての命題を示すのがいわゆる区間縮小法である。

なお 1.1 の条件 2. から、存在するとすれば唯一つであることは明らかだから、$\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} [a_k,\ b_k] \neq \emptyset$ であることが本質的である。これが有理数内においては成り立たないことに注意せよ。

2　中間値の定理

2.1　中間値の定理

$f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ が連続であるとし、d を $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値とするとき、$\exists c \in [a,\ b]$ で $f(c) = d$ である。

2.2　中間値の定理の証明

中間値の定理を区間縮小法で証明する。

$f(a) \leq d \leq f(b)$ の場合を証明する。$f(a) \geq d \geq f(b)$ の場合も同様である。

まず $[a_0,\ b_0] = [a,\ b]$ と置く。次いで以下 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して帰納的に $d \leq f\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right)$ なら $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = \left[a_k,\ \dfrac{a_k + b_k}{2}\right]$ と置き、$d > f\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right)$ なら $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = \left[\dfrac{a_k + b_k}{2},\ b_k\right]$ と置く。この

ようにして得られた $\{[a_n,\ b_n]\}\,(n=0,1,2,\ldots)$ は縮小列であるから、$c \in \bigcap_{k=0}^{+\infty}[a_k,\ b_k]$ となる実数 c が唯一つ存在する。

1. $f(a_k) \leq d \leq f(b_k)$
2. $\lim_{k\to+\infty} a_k = c,\ \lim_{k\to+\infty} b_k = c$

となることはこの縮小列の作り方から明らかであり、このことと f の連続性から

$$f(c) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) \leq d \leq \lim_{k\to+\infty} f(b_k) = f(c)$$

よって $f(c) = d$ が成り立つ。