平成２１年８月６日　八起数学塾

正値エルミート変換

1　正値エルミート変換の定義

V を複素計量線型空間、T を V のエルミート変換とする。また、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ のエルミート積を $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ で表す。

$(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{x}))} = \overline{(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x})}$ であるから、$(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x})$ は実数である。

定義：複素計量線型空間 V のエルミート変換 T が、$\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) > 0$ を満たす時、
T は**正値エルミート変換**であると言う。

2　正値エルミート変換の固有値

T が正値エルミート変換 $\Longleftrightarrow T$ のすべての固有値 > 0
これを示す。

$(\Longrightarrow)$
α を T の固有値、$\boldsymbol{a}$ を α に関する T の固有ベクトルとすると

$$0 < (T(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}) = (\alpha\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}) = \alpha\|\boldsymbol{a}\|^2$$

ここで $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{a}\|^2 > 0$ だから $\alpha > 0$ である。

$(\Longleftarrow)$
T はエルミート変換、従って正規変換であるから、V の正規直交基底 $< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_1 >$ で、すべての $\boldsymbol{e_i}$ が T の固有ベクトルになっているものがとれる。
$\boldsymbol{e_i}$ に関する T の固有値を α_i とする。$\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ として $\boldsymbol{x} = \sum_i a_i\boldsymbol{e}_i$ とおくと

$$\begin{aligned}
(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) &= (T(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i)|\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i) \\
&= (\sum_i a_i T(\boldsymbol{e}_i)|\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i) \\
&= (\sum_i a_i\alpha_i\boldsymbol{e}_i|\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i a_i \bar{a}_j(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_i \alpha_i|a_i|^2\|\boldsymbol{e}_i\|^2 \\
&= \sum_i \alpha_i|a_i|^2
\end{aligned}$$

仮定から $\alpha_i > 0$、また $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ から、少なくとも一つの i で $a_i \neq 0$ だから $(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) > 0$ が成り立つ。

　注意１：正値エルミート変換の固有値はすべて正である（従って 0 でない）から、正値エルミート変換は正則である。

　注意２：複素計量線型空間 V のエルミート変換 T が、$\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}) \geqq 0$ を満たす時、
T は**半正値エルミート変換**であると言う。
上記証明と同様にして、『T が半正値エルミート変換 $\Longleftrightarrow T$ のすべての固有値 $\geqq 0$』が分る。
またこのことと、注意１から明らかに、『T が正則な半正値エルミート変換 $\Longleftrightarrow$ T が正値エルミート変換』が分る。