目次

平成２１年６月１９日　八起数学塾

集合の話

1　初めに

これから述べる集合論は所謂**素朴集合論**と呼ばれている。普通に数学をやる分にはこの素朴集合論で十分だが、微妙な問題を考える時には問題が起きる。これについては最後の節で述べる。なお、この素朴集合論の問題を解決するために構築されたのが**公理的集合論**である。

2　論理の話

数学で使う論理について簡単にまとめておく。
まず真（正しい）か偽（正しくない）かが定まっている言明を命題という。定まっているというのは証明されているという事ではなく、いわば全能の神ならば、それの真偽を判定できるという意味であり、人間の立場からいえば、それが真か偽かのいずれかであるはずの言明を命題というのである。以下では命題を P, Q 等の文字で表す。既存の命題から新たな命題を作り出すことができる。それを論理の記号と共にまとめると次のようになる。

$\neg P$	P ではない	（否定）
$P \wedge Q$	P かつ Q	（論理積）
$P \vee Q$	P または Q	（論理和）
$P \Longrightarrow Q$	P ならば Q	（帰結）
$P \Longleftrightarrow Q$	（P ならば Q）かつ（Q ならば P）	（同値）

（この説明では以上の記号を使うが、論理の記号は書物によって相違があるので注意。）

これ以外に限定作用素と呼ばれる記号が有る。
例えば「$x^2 + y^2 = z^2$ を満たす正の整数 x, y, z が存在する。」という命題を考える。例えば $3^2 + 4^2 = 5^2$ であるから、この命題は真である。一方「$x^3 + y^3 = z^3$ を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。」も真である（証明は例えば高木貞治著初等整数論講義第 4 章 § 40 参照）。これらの命題を上記の記号を使って書くために日本語の表現を犠牲にして、前者を「x, y, z が**存在して**、x, y, z は正の整数で**かつ** $x^2 + y^2 = z^2$ である」後者を「**任意の** x, y, z に対して、x, y, z が正の整数**ならば** $x^3 + y^3 = z^3$ **ではない**」と書き換える。そして更に**存在して**を表す記号として $\exists$ を、**任意の**を表す記号として $\forall$ を導入する。こうする事でこの二つの命題は以下のように論理記号で表す事ができる。

$$\exists x \exists y \exists z (x, y, z \text{ は正の整数} \wedge (x^2 + y^2 = z^2))$$
$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \text{ が正の整数} \Longrightarrow \neg(x^3 + y^3 = z^3))$$

なお、それぞれの記述で「x, y, z **は**正の整数」、「x, y, z **が**正の整数」といった具合に助詞を調節してあるが、読みやすさを考えてのことであり、本質的なものではない。

ここで更に正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$ とし、集合論の記号を使えば以下のようになる。

$$\exists x\exists y\exists z(((x\in\mathbb{Z}_+)\wedge(y\in\mathbb{Z}_+)\wedge(z\in\mathbb{Z}_+))\wedge(x^2+y^2=z^2))$$
$$\forall x\forall y\forall z(((x\in\mathbb{Z}_+)\wedge(y\in\mathbb{Z}_+)\wedge(z\in\mathbb{Z}_+))\Longrightarrow\neg(x^3+y^3=z^3))$$

（注意 ： 偽な命題も記号で表して差し支えない。それが単に偽というだけである。）

記号化によって論理の記述が統一され、ひいては論理規則が整理され明確になる。素朴集合論において記号化は一種の便法であるが、公理的集合論では本質的に必要なものとなる。

論理の規則の内、主だったものを以下にまとめておく。

$P\wedge Q$ と $Q\wedge P$ とは論理的に同じである。 (1)
$P\vee Q$ と $Q\vee P$ とは論理的に同じである。 (2)
$P\wedge(Q\wedge R)$ と $(P\wedge Q)\wedge R$ とは論理的に同じである。 (3)
$P\vee(Q\vee R)$ と $(P\vee Q)\vee R$ とは論理的に同じである。 (4)
$P\wedge(Q\vee R)$ と $(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ とは論理的に同じである。 (5)
$P\vee(Q\wedge R)$ と $(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$ とは論理的に同じである。 (6)
P と$\neg(\neg P)$ とは論理的に同じである。 (7)
$\neg(P\wedge Q)$ と $(\neg P)\vee(\neg Q)$ とは論理的に同じである。 (8)
$\neg(P\vee Q)$ と $(\neg P)\wedge(\neg Q)$ とは論理的に同じである。 (9)
$P\Longrightarrow Q$ と $(\neg P)\vee Q$ とは論理的に同じである。 (10)
$\neg(\exists xP)$ と $\forall x(\neg P)$ とは論理的に同じである。 (11)
$\neg(\forall xP)$ と $\exists x(\neg P)$ とは論理的に同じである。 (12)
$\exists x\exists yP$ と $\exists y\exists xP$ とは論理的に同じである。 (13)
$\forall x\forall yP$ と $\forall y\forall xP$ とは論理的に同じである。 (14)
$\exists x(P\vee Q)$ と $(\exists xP)\vee(\exists xQ)$ とは論理的に同じである。 (15)
$\forall x(P\wedge Q)$ と $(\forall xP)\wedge(\forall xQ)$ とは論理的に同じである。 (16)
P が x を含まない時 $\exists x(P\wedge Q)$ と $P\wedge(\exists xQ)$ とは論理的に同じである。 (17)
P が x を含まない時 $\forall x(P\vee Q)$ と $P\vee(\forall xQ)$ とは論理的に同じである。 (18)
P が真でかつ $P\Longrightarrow Q$ も真ならば Q は真である。 （三段論法） (19)

上記で例えば「$P\wedge Q$ と $Q\wedge P$ とは論理的に同じである。」を「$(P\wedge Q)\Longleftrightarrow(Q\wedge P)$ は真である」と書きかえても、自然言語の簡略化として記号を使うという素朴な立場からはそれほど問題ない。しかし、公理的集合論では両者は明確に区別される。以下では素朴な立場を取り、この点についてはこれ以上説明しない。どちらの表現も、特に問題のない限り区別しない。

2.1 日常言語の論理との相違

自然言語には元々論理が備わっている。それをここでは日常の論理と呼ぶ事にする。いうまでもなく日常の論理は論理のための論理ではなく、生きるための手段の一つである。従って、日常の論理というものは複雑で、ある種のあいまいさも持っている（これは日常の論理の欠陥ではなくて、生きるための手段としての論理として理にかなったものである)。数学で使う論理はこの日常の論理から派生したものではあるが、あくまでも数学をやるための論理であるから、単純化され、あいまいさも除外される。この結果、数学の論理と日常の論理の言語感覚との間にはずれが生じる。以下ではこのずれ（相違点）について説明する。

2.1.1　∨（または）について

懸賞で「一等ブルーレイレコーダー**または**ノートパソコン」とあったら、この「または」は**そのどちらか一方**の意味と解釈できる。決して「一等はブルーレイレコーダーもノートパソコンも貰える」とは解釈できない。よってこの「または」は排他的である。一方市役所の図書館で本を借りられる者の条件に「市民**または**市内在職者」とある場合には、市民であってしかも同市内に勤めている者は当然この条件を満たすと解釈できる。よってこの場合の「または」は**少なくともどちらか一方**の意味であり、排他的ではない。なぜそのように解釈できるかといえば、懸賞を出す側はなるべくコストを下げたいと思っており、市役所の行政サービスは、その市に関係の深い人に優先的に提供されるものであるという常識が自然に働くからである。

このように日常の論理での「または」は状況によってその意味が変化する。日常の論理は日常の生活のための論理であるからそのほうが都合が良い。しかし数学で論理を使う場合、状況で意味が変化するというのは好ましくない。意味を固定する必要がある。

数学では P **または** Q を、P, Q の**少なくともどちらか一方**の意味で使う。P と Q が同時に成り立っても良い（排他的でない）。上記の論理規則の (6)(8)(9) は「または」が排他的でないことが前提である。(8) で説明すると、例えば「x は白い犬である」という命題の否定は「x は白い犬ではない」となる。$x=$ 黒い犬、x=白い猫、$x=$ 赤いコップのいずれの場合も「x は白い犬ではない」（つまり「x は白い犬である」の否定）は真である。ここで「x は白い犬である」を「x は白い**かつ** x は犬である」と書き換えて (8) を使うと「x は白くない**または** x は犬ではない」となる。当然この命題も $x=$ 黒い犬、x=白い猫、$x=$ 赤いコップのすべての場合について真でなくてはならい。もし仮に「または」が排他的であったとすると、x が白くないと同時に犬ではない場合が除外されてしまって、$x=$ 赤いコップの場合が偽になってしまい、(8) が成り立たなくなってしまう。

今は具体例で説明したが、純粋に論理的な立場からいえば、単にそれぞれの命題が真か偽かだけが問題なので、「真」と「偽」だけを使って議論できる。この場合記号 $\neg, \wedge, \vee$ を以下の式のように真と偽についての演算子として扱うとうまくいく。（公理的集合論では以下の式の中の $\neg, \wedge, \vee$ と先に述べた論理の記号とを区別する。先の $\neg, \wedge, \vee$ は論理を記述するための ”単なる記号 ”であり、以下の式の中の $\neg, \wedge, \vee$ は真と偽という「値」に対しての ” 演算子 ” である。しかしここでは素朴な立場から、そのような区別は無理にしなくて良い。）

$$
\begin{aligned}
\neg 真 &= 偽 \\
\neg 偽 &= 真 \\
真 \wedge 真 &= 真 \\
真 \wedge 偽 &= 偽 \\
偽 \wedge 真 &= 偽 \\
偽 \wedge 偽 &= 偽 \\
真 \vee 真 &= 真 \\
真 \vee 偽 &= 真 \\
偽 \vee 真 &= 真 \\
偽 \vee 偽 &= 偽
\end{aligned}
$$

ここで「真 $\vee$ 真 $=$ 真」という等式が「$\vee$」が排他的でないことを示している。

「$\vee$」が排他的であれば (6) が成り立たないという事を「真」と「偽」を使って示すと以下のようになる。「$\vee$」を排他的とするれば、上の式と違って「真 $\vee$ 真 $=$ 偽」となる（それ以外は全て同じ）。P, Q が真で R が偽の場合を考える。

$P \lor (Q \land R)$ は 真 $\lor$ (真 $\land$ 偽) である。これを計算すると。

$$真 \lor (真 \land 偽) = 真 \lor 偽 = 真$$

一方 $(P \lor Q) \land (P \lor R)$ は (真 $\lor$ 真) $\land$ (真 $\lor$ 偽) より

$$(真 \lor 真) \land (真 \lor 偽) = 偽 \land 真 = 偽$$

となって両者は一致しない。「$\lor$」が排他的であるとすると (8)(9) が成り立たない事も、同様のやり方で示せる。

2.1.2 $\Longrightarrow$（ならば）について

(10)「$P \Longrightarrow Q$ と $(\neg P) \lor Q$ とは論理的に同じである。」は、日常言語の感覚からはわかりにくい。「P ならば Q である」を「P であって Q でない事はない」と読み替えてこれを記号で表してみると「$\neg(P \land \neg Q)$」となるので、これに (8) と (7) を適用すれば「$(\neg P) \lor Q$」となる。

しかしこれは、日常で使う「ならば」とは少し感じが違うものと思われる。P が真の場合は日常的に使う「ならば」と変わらないが、P が偽の場合には、Q が真であるか偽であるかに係わらず、常に $P \Longrightarrow Q$ が真になってしまう（実際 P が偽ならば $\neg P$ は真なので Q の真偽を問わず、$(\neg P) \lor Q$ は真)。例えば「烏が白いならば太陽は西から昇る」も「烏が白いならば太陽は東から昇る」も共に真という事になる。前者は日常でも使えるであろうが、その場合は「烏が白い」を否定するのが目的であって、この発言が真だと主張するのが目的ではない。そして後者のような言明は真とか偽とかいうより、日常言語においては無意味な文だと考えるのが妥当である。しかし数学の命題としては真として扱うのである。

2.1.3 $\exists$ と $\forall$ について

$\exists$ については「〜が存在する」と普通に解釈してよい。一方が $\forall$ は少し注意を要する。
$\forall$ には「任意の」、「勝手な」、「どんな」、「いかなる」、「すべての」、「あらゆる」等々色々な読み方がある。数学でこれらの言葉を使う時は全て同じ意味であるが、読み手や聴き手により良く内容を伝えるためにこれらの読み分けは有効である。

「任意の」と「すべての」という言葉の本来の意味は異なるが、これを同じとするところに、数学の１つのポイントがある。例えば平面幾何学で「三角形の内角の和が 180 度である事を証明する」といった場合を考えてみる。いうまでもなく、「**すべての**三角形の内角の和が 180 度である事を証明する」という事であるが、これを語義通りに実行するとすれば無限にある三角形をすべて調べなくてはならず、明らかに不可能である。そこで**すべての**を証明する代わりに**任意の**を証明するのである。これは**すべての**と**任意の**が同義であるという立場によって可能であり、これなくしては数学が成り立たない。

最後に (11)(12) の中の記号列を読み下しておく。

$\neg(\exists x P)$：P を満たす x は存在しない。
$\forall x(\neg P)$：どんな x に対しても決して P ではない。
$\neg(\forall x P)$：どんな x に対しても P が成り立つというわけではない
$\exists x(\neg P)$：P を満たさない x が存在する。

ここで $\neg(\forall x P)$ を「任意の x について P ではない」と読みたくなるが、これだと通常の日本語の解釈では、$\forall x(\neg P)$ の意味にとれるので注意が必要である。

3 説明の都合上・・・

説明の都合上ここでは思考の対象になるものはなんでも「対象」と呼ぶ事にする。つまり人もリンゴも「1」も「昨日見た夢」もすべて「対象」である。

4 集合の定義

集合とはそれがその集まりに含まれているか否かが完全に定まっている対象の集まりの事である。例えば「背の高い人の集まり」では集合にはならないが、「身長が 180cm 以上の人の集まり」ならば集合になる。
つまり

定義：対象を勝手に選んだ時その対象がそれに属しているか否かが明確に定められている対象の集まりを集合と呼ぶ

これが素朴集合論における集合の定義である。

5 集合の要素

A を集合とする。対象 a が A に属している事を $a \in A$ と書く（$A \ni a$ とも書く）。このとき、a は A の**要素**（または**元**）であるという。属している要素の数が有限個の場合その集合を**有限集合**といい、そうでない場合**無限集合**という。また対象 a が A に属していない事を $a \notin A$ と書く（$A \not\ni a$ とも書く）。

6 空集合

要素を何も持たない集合を**空集合**と呼んで $\emptyset$ で表す。なお、空集合も有限集合の仲間に入れる。

7 集合間の関係

$\forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$ が成り立つ時、集合 A と B は**等しい**といって $A = B$ で表す（集合 A と B が等しくない事は $A \neq B$ で表す）。要するに集合 A と B に属する要素が完全に一致している時それら二つの集合は等しいというのである。また $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ が成り立つとき、つまり A のどの要素もすべて B の要素になっているとき、A は B の**部分集合**であるといって、$A \subset B$ で表す（$B \supset A$ とも書く）。また $A \subset B$ かつ $A \neq B$ の時 A は B の**真部分集合**であるという。これを、$A \subsetneqq B$ で表す（$B \supsetneqq A$ とも書く）。

空集合はすべての集合の部分集合（任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$）である。つまり A を任意の集合とするとき、$\forall x(x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A)$ が成り立つ。実際どんな x に対しても $x \in \emptyset$ は偽なので、4 ページの (10) によって $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$ は（$x \in A$ が真であろうがなかろうが）常に真になるからである。
以下は明らかである。

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A \text{ ならば } A = B$$
$$A \subset B \text{ かつ } B \subset C \text{ ならば } A \subset C$$

8　集合の表示法

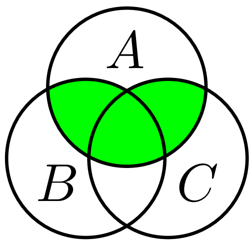
$A = \{$ 犬, 猿, 雉 $\}$ のようにその要素を具体的に並べて書き表す表示法を集合の**外延表示**といい、$B = \{x|x$ は 3 で割ると 2 余る整数 $\}$ といった具合に、その要素を論理的に指定する書き方を集合の**内包表示**と呼ぶ。便宜上 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ といった書き方もするが、本当の意味で外延表示ができるのは有限集合だけである。さらに有限集合であっても、要素の数がある程度多くなれば書くのも見るのも困難である。よって数学で集合を定義（表示）する際には内包表示が普通である。

9　共通集合、合併集合、補集合

集合 $\{x|x \in A$ かつ $x \in B\}$ を A と B の**共通集合**または**積集合**といって $A \cap B$ で表す。また集合 $\{x|x \in A$ または $x \in B\}$ を A と B の**合併集合**または**和集合**といって $A \cup B$ で表す。さらに集合 $\{x|x \in A$ かつ $x \notin B\}$ を A に対する B の**補集合**あるいは A から B を引いた**差集合**といって $A - B$ で表す。
次が成り立つ。

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B \tag{20}$$
$$A \cup B = A \Longleftrightarrow A \supset B \tag{21}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{22}$$
$$A \cup B = B \cup A \tag{23}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{24}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{25}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{26}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{27}$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \tag{28}$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \tag{29}$$

これらの法則を説明するときによく使われるのが、ベン図若しくはオイラー図式と呼ばれる図である。例えば (26) を説明するのに右のような図を描く。この図は直感的であるが、図を描いても証明にはならない。論証が必要である。以下に (20) と (26)、(28) の証明を示す。その他も同様である。



(20) の証明。
($\Longrightarrow$)
$x \in A$ とする。$A = A \cap B \subset B$ だから $x \in B$。よって $A \subset B$
($\Longleftarrow$)
$A \cap B \subset A$ は明らかだから $A \subset A \cap B$ を示せば十分である。$x \in A$ とすると、$A \subset B$ だから $x \in B$。よって $x \in A \cap B$。ゆえに $A \subset A \cap B$

(26) の証明。

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を示すには $x\in A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を示せばよい。

$x\in A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in(B\cup C))\Longleftrightarrow(x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C))$

ここで 4 ページの (5) より

$(x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C))\Longleftrightarrow((x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C))$ である。

一方 $((x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C))\Longleftrightarrow(x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C))$

$\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ なので証明された。

(28) の証明。

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ を示すには $x\in A-(B\cap C)\Longleftrightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)$ を示せばよい。

$(\Longrightarrow)$

$x\in A-(B\cap C)$ ならば $x\in A\wedge x\notin(B\cap C)$ である

ここで $x\notin(B\cap C)$ は $x\in(B\cap C)$ の否定であり、また、$x\in(B\cap C)$ は $x\in B\wedge x\in C$ なので、$x\notin(B\cap C)$ は $\neg(x\in B\wedge x\in C)$ である。よって 4 の (8) より $x\notin(B\cap C)$ は $x\notin B\vee x\notin C$ である。従って $x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$ なので 4 の (5) によって $x\in(A\wedge x\notin B)\vee(A\wedge x\notin C)$ となって $x\in(A-B)\cup(A-C)$ がわかった。

$(\Longleftarrow)$

上記の逆をたどればよい。

注意：以上の証明では論理記号を多用しているが、これは論理の規則との対応を明確にするためであり、論理記号の多用を推奨するものではない。証明は論理の意味を感じつつ行うべきであり（そうでなければ通常できない）、そのためには適宜「かつ」「または」等の言葉を用いるとよい。なお、論理の機械的な変形は、混乱したときや、意味を感じつつ行った証明を見直す際には有効である。

10　集合系の共通集合と合併集合

その要素がすべて集合であるような集合（例えば次の 11 節のベキ集合等）を特に**集合系**と呼ぶ。

$\mathfrak{U}$ を集合 U の部分集合から成る集合系とする。$\mathfrak{U}$ のすべての要素（集合）の共通集合（積集合）と合併集合（和集合）を以下のように定義する。

$$\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x\in U \text{ かつ } \forall X(X\in\mathfrak{U} \text{ ならば } x\in X)\} \qquad \mathfrak{U}\text{ のすべての要素の共通集合} \tag{30}$$

$$\bigcup_{X\in\mathfrak{U}} X \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists X(X\in\mathfrak{U} \text{ かつ } x\in X)\} \qquad \mathfrak{U}\text{ のすべての要素の合併集合} \tag{31}$$

例えば A,B を集合 U の部分集合として、$\mathfrak{U}=\{A,B\}$ とすると $\mathfrak{U}$ は集合 U の部分集合から成る集合系であって

$$\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X = A\cap B \tag{32}$$

$$\bigcup_{X\in\mathfrak{U}} X = A\cup B \tag{33}$$

となる。

注意１ ：この集合系という言葉に深い意味はない。説明の便宜上単にその要素が集合であるということを示しているに過ぎない。なお、この用法は松坂 [3] に従った。

注意２ ：「左辺 $\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ 右辺」は左辺の式を右辺の式で定義するという意味の記号である。また類似の記号として「$\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$」という記号も使う。「左辺 $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 右辺」と書いたときは右辺の条件で左辺を定義する（左辺の記述は右辺が成り立つとき、そしてそのときに限る）という意味である。

注意３ ：上記の共通集合の定義で仮に $\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x|\forall X(X \in \mathfrak{U}$ ならば $x \in X)\}$ とすると、$\mathfrak{U} = \emptyset$ の場合 $\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X$ は「すべての対象から成る集合」になってしまうが、このようなものを認めると矛盾が生じる。これを避けるために「$x \in U$ かつ」の部分が必要であり、またこの部分があるので、$\mathfrak{U} = \emptyset$ の場合 $\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X = U$ となる。本来ならば $\bigcap_{X\in\mathfrak{U}} X$ という表現に U を含めるべきだが、集合系を考えるときは通常 U が暗黙に了解されているので、明示しない。$\mathfrak{U} \neq \emptyset$ の場合は（$\mathfrak{U}$ が集合 U の部分集合から成る集合系だから）U はあってもなくても同じである。なお、合併集合の定義についてはこのような問題がないので、U を含める必要がない。$\mathfrak{U} = \emptyset$ の場合 $\bigcup_{X\in\mathfrak{U}} X = \emptyset$ である。

11　ベキ集合

A を集合とする。集合 $\{X|X \subset A\}$ つまり A の部分集合すべてからなる集合を A の**ベキ集合**と呼んで、$\mathfrak{P}(A)$ で表す。
例えば $A = \{$ 犬, 猿, 雉 $\}$ ならば
$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{$ 犬 $\}, \{$ 猿 $\}, \{$ 雉 $\}, \{$ 犬, 猿 $\}, \{$ 犬, 雉 $\}, \{$ 猿, 雉 $\}, \{$ 犬, 猿, 雉 $\}\}$ となる。
$\mathfrak{P}(\emptyset)$ はどうなるか？答えは $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ である。$\{\emptyset\}$ は空集合を要素に持つ集合であって、空集合ではない（$\emptyset \neq \{\emptyset\}$）ので注意が必要である。

12　順序対

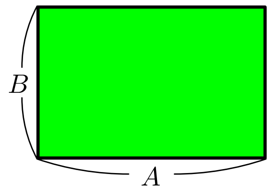
a, b を対象とする。集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ を (a, b) と書いて a と b の**順序対**と呼ぶ。
(a, b) と (c, d) を順序対とする。明らかに $((a, b) = (c, d)) \Longleftrightarrow (a = c$ かつ $b = d)$ が成り立つ。（この順序対の定義はブルバキ [2] に従った。$((a, b) = (c, d)) \Longleftrightarrow (a = c$ かつ $b = d)$ さえ成り立てばどんな定義でも良いが、おそらくこの定義が最も簡単だと思われる。）

注意 ：a と b の順序対 (a, b) を a と b の「対」あるいは「組」と呼ぶことがある。

13　三重対及び多重対

$(a, b, c) = ((a, b), c)$ で (a, b, c) を定義して、a, b, c の**三重対**という。
以下帰納的に $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n)$ として n 重対を定義する。
$((a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)) \Longleftrightarrow (a_i = b_i(i = 1, 2, \cdots, n))$ が成り立つ。

14　直積集合



A, B を集合とする。このとき集合 $\{(x,y)|x \in A$ かつ $y \in B\}$ を $A \times B$ と書いて、A と B の**直積集合**と呼ぶ。また $A \times A$ を A^2 と書く。さらに $A^2 \times A$ を A^3 と書き、以下同様に $A^{n-1} \times A$ を A^n と書く。
直積集合は右の図のようにイメージすると分りやすい。

なお空集合との直積については、$A \times \emptyset = \emptyset$、$\emptyset \times A = \emptyset$ であることと
$(A \times B = B \times A) \Longleftrightarrow ((A = B)$ または $(A = \emptyset)$ または $(B = \emptyset))$ であることに注意。

15　関係

$A \times A$ の部分集合のことを A の**二項関係**あるいは単に A の**関係**と呼ぶ。

R を A の関係とするとき $a, b \in A$ に対して $(a, b) \in R$ であることを aRb と表す。$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ だから空集合の関係は $\emptyset$ だけである。

16　対応

A, B を集合、G を $A \times B$ の部分集合とするとき、三重対 (G, A, B) を集合 A から集合 B への**対応**と呼ぶ。また G、A、B をそれぞれ対応 (G, A, B) の**グラフ**、**始集合**、**終集合**と呼ぶ。さらに集合 $\{a|a \in A$ かつ $\exists b \in B$ で $(a, b) \in G\}$ を対応 (G, A, B) の**定義域**、集合 $\{b|b \in B$ かつ $\exists a \in A$ で $(a, b) \in G\}$ を対応 (G, A, B) の**値域**と呼ぶ。

17　逆対応

(G, A, B) を対応とする。グラフ G の要素（順序対）の順序を逆にしたものを要素とする集合 $\{(b, a)|b \in B$ かつ $a \in A$ かつ $(a, b) \in G\}$ を G の**逆グラフ**といって G^{-1} で表す。このとき (G^{-1}, B, A) は B から A への対応である。この対応を (G, A, B) の**逆対応**という。なお明らかに $(G^{-1})^{-1} = G$ である。つまり G と G^{-1} は互いにもう一方の逆グラフである。

18　対応の記法

対応は (G, A, B) のような書き方をせずに、しばしば f などの一つの文字で表す。ただこのように一つの文字で表すと、A や B が明示されないので、$f : A \longrightarrow B$ や $A \xrightarrow{f} B$ といった記号も使われる。場合によっては f を明示しないで、単に $A \rightarrow B$ と書くこともある。

対応 $f = (G, A, B)$ の定義域を $\mathrm{Dom}f$、値域を $\mathrm{Im}f$ で表す。また逆対応 (G^{-1}, B, A) を f^{-1} で表す。明らかに $(f^{-1})^{-1} = f$ である。つまり f と f^{-1} は互いにもう一方の逆対応である。

$f : A \longrightarrow B$ を対応、G を f のグラフとし、U を A の部分集合とする。
集合 $\{b|b \in B$ かつ $\exists\ u \in U$ で $(u, b) \in G\}$ を $f(U)$ という記号で表して、f による U の**像**という。（これを使えば $\mathrm{Im}f = f(\mathrm{Dom}f) = f(A)$ となる。）また V を B の部分集合とするとき $f^{-1}(V)$（つまり f^{-1} による V の像）を f による V の**逆像**という。

なお $a \in A$ について、$f(\{a\})$ を省略して $f(a)$ とも書くことにする。

注意 ： 対応の記法は本によって様々である。上記の記法はここでの説明の便宜を考え、複数の本の記法を

折衷し、かつアレンジしたものであり、一般性があるわけではない。しかし、上記の記法に関して意味を汲み取ってもらえれば、どのような本の記法もすぐに了解できるようになるはずである。

19 順序関係

A を集合とする。A の関係 R が以下の条件を満たすとき、関係 R は A の**順序関係**（または**順序**）であるという。

$$\forall a \in A \text{ に対して } aRa \tag{34}$$
$$\forall a, b \in A \text{ に対して } ((aRb \text{ かつ } bRa) \Longrightarrow a = b) \tag{35}$$
$$\forall a, b, c \in A \text{ に対して } ((aRb \text{ かつ } bRc) \Longrightarrow aRc) \tag{36}$$

またこの条件に加えて

$$\forall a, b \in A \text{ に対して } aRb \text{ または } bRa \text{ の少なくとも一方が必ず成り立つ} \tag{37}$$

という条件を満たすとき、R は**全順序関係**（または**全順序**）であるという。

注意 ： 実数の大小関係の $<$ や $>$ は (34) が成り立たないので順序関係ではない（数学では順序とは呼ばないという意味)。これに対して $\leqq$ と $\geqq$ は順序関係それも全順序関係である。

20 順序集合

A を集合とし、関係 $\preceq$ を A の順序とする（19 節では順序を R で表したが、本節では外観の分りやすさを尊重して $\preceq$ とした。もちろん本質的なことではない)。このとき A と $\preceq$ の組 $(A, \preceq)$ を**順序集合**と呼ぶ。特に $\preceq$ が全順序のときは $(A, \preceq)$ を**全順序集合**と呼ぶ。

11 ページ 15 節で述べたように空集合の関係は $\emptyset$ だけである。違和感があるかも知れないが、$(\emptyset, \emptyset)$ は全順序集合である。例えば条件 (34)「$\forall a \in A$ に対して aRa」を確かめてみる。この条件は「$\forall a(a \in A \Longrightarrow aRa)$」であるが、$R = \emptyset$ ならばどんな a に対しても $a \in R$ は偽である。ところが 3 ページ 2 節に述べたように P が偽ならば $P \Longrightarrow Q$ は Q の真偽に関わらず真になる。よってどんな a に対しても $a \in R \Longrightarrow aRa$ は真、従って $\forall a(a \in R \Longrightarrow aRa)$ は真となる。全く同じ理由で他の条件も成り立つ。

$(A, \preceq)$ を順序集合とし、U を A の部分集合とする。$\preceq_U = \preceq \cap (U \times U)$ とすれば、明らかに $\preceq_U$ は U の順序になる。この順序集合 $(U, \preceq_U)$ を $(A, \preceq)$ の**部分順序集合**と呼ぶ。また $\preceq_U$ が全順序のとき、$(U, \preceq_U)$ を**全順序部分集合**と呼ぶ。$\preceq$ が全順序でなくても $\preceq_U$ が全順序になることはあり得る（例えば $\preceq_\emptyset$ はいつでも全順序である)。もちろん $\preceq$ が全順序なら $\preceq_U$ は全順序である。

順序 $\preceq$ を前提に議論するとき、あるいは順序 $\preceq$ を明示する必要のないときは順序集合 $(A, \preceq)$ という代わりに、しばしば「順序集合 A」という省略した表現を使う。「部分順序集合 U」、「全順序集合 A」、「全順序部分集合 U」等々の使い方も同様である。

また以降混乱のない限り $(U, \preceq_U)$ を単に $(U, \preceq)$ と書く。

注意 ： $\preceq_U$ という記号は一般的なものではなく、説明の都合上ここでだけ使っている記号である。

21 同値関係

A を集合とする。A の関係 R が以下の条件を満たすとき、関係 R は**同値関係**であるという。

$$\forall a \in A \text{ に対して } aRa \tag{38}$$
$$\forall a, b \in A \text{ に対して } (aRb \Longrightarrow bRa) \tag{39}$$
$$\forall a, b, c \in A \text{ に対して } ((aRb \text{ かつ } bRc) \Longrightarrow aRc) \tag{40}$$

例えば図形の合同関係や相似関係は同値関係である。

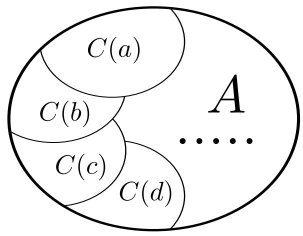
22 商集合

A を集合とし、R を A の同値関係とする。$a \in A$ に対して集合 $\{x | x \in A \text{ かつ } xRa\}$ を同値関係 R による a の同値類といって $C_R(a)$（略して $C(a)$）と書く。もちろん $C(a) \subset A$ だが、加えて以下の性質がある。

$$\forall a \in A \text{ に対して } a \in C(a) \text{ 特に } C(a) \neq \emptyset \tag{41}$$
$$\forall a, b \in A \text{ に対して } (C(a) = C(b) \Longleftrightarrow aRb) \tag{42}$$
$$\forall a, b \in A \text{ に対して } (C(a) \neq C(b) \Longleftrightarrow C(a) \cap C(b) = \emptyset) \tag{43}$$
$$\bigcup_{x \in A} C(x) = A \text{（すべての } C(x) \text{ の合併集合を作ると } A \text{ に等しくなるという意味。第 28 節参照）} \tag{44}$$

どの性質もほぼ明らかだが、念のため (43) を示す。

これを示すには $C(a) = C(b) \Longleftrightarrow C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ を示せば良い。$\Longrightarrow$ は (41) より明らかだから $\Longleftarrow$ を証明する。
$C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ ならば $\exists x$ で $x \in C(a) \cap C(b)$ つまり $\exists x$ で $x \in C(a)$ かつ $x \in C(b)$ よって定義から xRa かつ xRb ここで (39) と (40) より aRb よって (42) から $C(a) = C(b)$ 証明終わり。



(43) と (44) が成り立つことを A は同値類 $C(x)(x \in A)$ の直和であるという。右上のような図にすると直感的に理解しやすい。A が互いに共通な要素を持たない区画に分割されるのである。
ここで集合 $\{C(x) | x \in A\}$ を同値関係 R による A の**商集合**といい、A/R で表す。

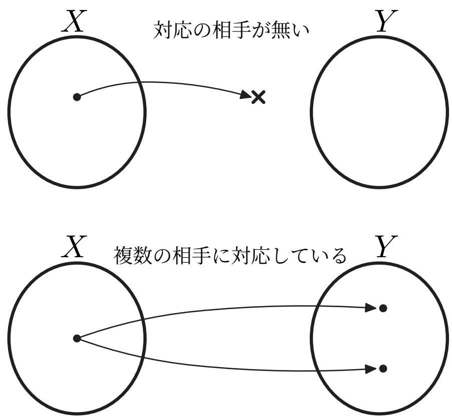
23　対応と写像

対応 (G, X, Y) が次の条件を満たすとき、対応 (G, X, Y) を**写像**と呼ぶ。

$$\forall x \in X \text{ に対して } \exists y \in Y \text{ で } (x, y) \in G \tag{45}$$

$$\forall x \in X \text{ に対して } (((x, y_1) \in G \text{ かつ } (x, y_2) \in G) \Longrightarrow y_1 = y_2) \tag{46}$$

以上は重要なので説明をする。(45) がいっているのは「すべての $x \in X$ に対してそれに対応する $y \in Y$ が存在するということである。つまり対応 (G, X, Y) が写像なら、その定義域は X である。また (46) はそのような $y \in Y$ は唯一つだけでなければいけないという意味である。要するに $\forall x \in X$ についてそれに対応する $y \in Y$ が唯一つ定まるということである。従って右の図のような対応は写像とは呼ばない。これに対して $y \in Y$ の方はそれに対応する $x \in X$ が無くても構わないし、X の複数（無限個も可）の元が対応していても構わない。



$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする。(45)、(46) によって $\forall x \in X$ に対して $\exists y \in Y$ で $f(x) = \{y\}$ だが、これは $f(x) = y$ とした方が分りやすく、また有用である。そこで対応 f が写像の場合 $f(x)$ は $\{y\}$ ではなく y を意味するものとする。記法の混用だが、混乱はないと思う。
これは微積分などで普通に使う記法 $y = f(x)$ の一般化になっている（微積分の場合は数から数への対応）。
なお $x \in X$ に $y \in Y$ が対応していることを $x \mapsto y$ と書く。

注意 ： **関数**という言葉もしばしば使われるが、この言葉の使われ方は色々である。たいていは写像と同義で使われるが、数の集合から数の集合への写像だけを関数と呼ぶ場合もある。また関数論では多価関数といって一対多（従ってこれは写像ではない）の関数を考えたりもする。

24　制限写像

f を X から Y への写像とし、U を X の部分集合とする。このとき $u \in U$ に対して $u \mapsto f(u)$ によって U から Y への写像を定めることができる（これが条件 (45) と (46) を満たすことは明らかである）。この写像を f の U による**制限写像**と呼んで、記号 $f|U$ で表す。つまり $G = \{(u, f(u)) | u \in U\}$ と置けば、(G, U, Y) は U から Y への写像であり、この写像を $f|U$ で表すということである。「f の定義域を U に制限した写像が $f|U$ である。」といえば直感的に分りやすい。

25　写像の合成

X から Y への写像 f と Y から Z への写像 g が与えられたとき、$x \in X$ に対して $x \mapsto g(f(x))$ とすれば、この対応は X から Z への写像になる（この対応が条件 (45) と (46) を満たしていることを確かめてみよ）。この写像を $g \circ f$ あるいは $\circ$ を省略して gf で表して写像 f と写像 g の**合成写像**という。つまり $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ を合成して $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ができるわけである。これを以下のような**図式**にすると分りやすい。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

26　全射、単射、全単射、逆写像

f を X から Y への写像とする。$f(X) = Y$ が成り立つとき f は全射であるという。また $\forall x_1, x_2 \in X$ に対して $(x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ が成り立つとき f は単射であるという。そして全射かつ単射である写像を全単射であるという。

f が全単射ならば明らかに逆対応 f^{-1} も写像でしかも全単射である。また対応の所でも述べたが、$(f^{-1})^{-1} = f$ である。つまり f と f^{-1} は互いにもう一方の逆写像である。

全射は**上への写像**ともいう。この言葉を使うときは一般の写像を**中への写像**と呼ぶ（上への写像は中への写像の特別な場合と考える）。また単射を**１対１の写像**とも呼ぶ。これらの言葉を使えば全単射は**１対１かつ上への写像**ということになる。

U が X の部分集合であるとき、$u \in U$ に u 自身を対応させれば（$u \mapsto u$)、写像 $U \to X$ ができる。この写像を U の X の中への**埋め込み写像**と呼んで $U \hookrightarrow X$ で表す。埋め込みはもちろん単射である。いうまでもなく $U = X$ のとき、そしてそのときに限って $U \hookrightarrow X$ は全単射になる。この全単射 $X \hookrightarrow X$ を X の上の**恒等写像**と呼んで、id_X で表す。

27　添数集合

$\Lambda \xrightarrow{a} A$ を写像とする。この写像 a を Λ によって添数づけられた A の元の族、Λ を $a(\Lambda)$ の添数集合、Λ の元を添数と呼ぶことがある。このとき $\lambda \in \Lambda$ について $a(\lambda)$ を a_λ と書く。また a を $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で、$a(\Lambda)$ を $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で表す。

これは要するに添え字（添数）というものの集合論的な表現に他ならない。

以下上記の状況を簡単に「集合 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$」あるいは単に「$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$」と表現する。

28　集合の族とその演算

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が集合系のとき、つまり「$\forall \lambda \in \Lambda$ について X_λ は集合である」という条件を満たすとき、$(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は（Λ によって添数づけられた）集合の族であるという。

集合の族に対して以下のようにして、この族の共通集合（積集合)、合併集合（和集合）および直積集合を定義する。

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{X\in\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}} X \qquad \text{集合族 } (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\text{の共通集合} \tag{47}$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{X\in\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}} X \qquad \text{集合族 } (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\text{の合併集合} \tag{48}$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ f \middle| f \text{ は写像} \Lambda \xrightarrow{f} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{かつ } \forall\lambda\in\Lambda \text{で } f(\lambda)\in X_\lambda \right\} \qquad \text{集合族 } (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\text{の直積集合} \tag{49}$$

なお $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ のときは $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\bigcap_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ とも書く。
同様に $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\bigcup_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ とも書き、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\prod_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ とも書く。
特に $\Lambda = \{1, 2\}$ のときは $\bigcap_{\lambda=1}^{2} X_\lambda = X_1 \cap X_2$、$\bigcup_{\lambda=1}^{2} X_\lambda = X_1 \cup X_2$ であることが分る。
一方 $\prod_{\lambda=1}^{2} X_\lambda$ と $X_1 \times X_2$ は別物である。しかし順序対は 12 節で述べたように、$((x_1, x_2) = (y_1, y_2)) \iff (x_1 = y_1 \text{かつ } x_2 = y_2)$ であることに本質的な意味があり、写像 $\{1, 2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2; (1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2)$ によって順序対を定義してもこの条件を満たすから。この意味において、$\prod_{\lambda=1}^{2} X_\lambda$ と $X_1 \times X_2$ を**同一視**する。同様に $\prod_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$ を n 重対の集合と同一視する。もちろん順序対や n 重対の定義を変えるのではない、あくまでも同一視である。このような同一視は（混同しない限り）思考や表現の節約になる。

29　集合の濃度

集合の大きさについて考える。有限集合の大きさについてはその集合の含む要素の個数を考えれば良い。個数には 0 または自然数[*1]（$1, 2, 3, \cdots$）が対応している。それでは無限集合はどうだろうか？集合論の創始者カントルはある意味で「無限集合にも大きさの違いがある」ということを発見した。

集合の大きさを**濃度**という言葉で表す。有限集合の場合はその集合に含まれる要素の個数である。つまり有限集合の場合の濃度は個数と同じ意味である。集合 A の濃度を $|A|$ で表す。有限集合の場合、例えば $|\{$ 犬, 猿 , 雉 $\}| = 3$ である。

有限集合の濃度を**有限濃度**、無限集合の濃度を**無限濃度**と呼ぶ。有限濃度とは 0 および自然数（$1, 2, 3, \cdots$）の総称に他ならない。

A, B を集合とする。A から B への全単射が存在するとき A と B の濃度は等しいといって $|A| = |B|$ で表す（A と B の濃度が等しくないことは $|A| \neq |B|$ で表す)。これが同値関係になることは明らかである。

それでは「A の濃度が B の濃度より小さいかまたは等しいあるいは B の濃度が A の濃度より大きいかまたは等しい（記号としては $|A| \leqq |B|$ あるいは $|B| \geqq |A|$)」はどのように定義したら良いだろうか？次の二つ

[*1] 一般的には 0 も自然数に含める方が多いようだが、ここでは含めないことにする。

の定義が考えられる。

$$A \text{ から } B \text{ への単射が存在するとき } |A| \leqq |B| \text{ と定義する。} \tag{50}$$
$$B \text{ から } A \text{ への全射が存在するとき } |A| \leqq |B| \text{ と定義する。} \tag{51}$$

とりあえず $|A| \leqq |B|$ の定義として (50) を採用してみると以下が成り立つ。

$$(|A| \leqq |B| \text{ かつ } |B| \leqq |A|) \Longleftrightarrow (|A| = |B|) \tag{52}$$
$$(|A| \leqq |B| \text{ かつ } |B| \leqq |C|) \Longrightarrow (|A| \leqq |C|) \tag{53}$$
$$\forall A, B \text{ に対して } |A| \leqq |B| \text{ または } |B| \leqq |A| \tag{54}$$
$$(|A| \leqq |B|) \Longleftrightarrow (B \text{ から } A \text{ への全射が存在する}) \tag{55}$$

$A \xrightarrow{f} B$ が全単射ならその逆写像 $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ も全単射であるし、全単射はもちろん単射だから (52) の $\Longleftarrow$ は成り立つ。また $A \xrightarrow{f} B$ と $B \xrightarrow{g} C$ が単射ならば合成写像 $A \xrightarrow{g \circ f} C$ も単射だから (53) も成り立つ。(52) の $\Longrightarrow$ は**ベルンシュテインの定理**と呼ばれる。(54) は整列可能性定理と整列集合の比較定理から導かれる。さらに (55) はベルンシュテインの定理と選出公理（後述）から分る。（これらの定理の内容や証明は、文献：松坂 [3] を参照。）

(52)〜(54) はこの $\leqq$ が全順序であることを示している。従ってこの $\leqq$ が濃度の大小関係として妥当なものであることが分る。

また (55) は (50) と (51) が同値な定義であることを示している。

注意：A の濃度が B の濃度より小さい（B の濃度が A の濃度より大きい）つまり $|A| \leqq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ を $|A| < |B|$（または $|B| > |A|$）で表す。

30 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ ！

自然数の集合を $\mathbb{N}$、有理数の集合を $\mathbb{Q}$ で表す。このとき $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ が成り立つ。$\mathbb{N}$ は $\mathbb{Q}$ の真部分集合である。有限集合の場合真部分集合の濃度（要素の個数）がもとの集合の濃度に等しいなどということはあり得ない。しかし無限集合の場合はそれがあり得るのである。

数直線を思い浮かべると自然数はまばらである。一方で有理数は数直線のいたるところに分布している（位相の言葉では稠密という）。この両者の間に全単射があるというのは驚くべきことであるが、以下に示すように事実である。

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ だから $|\mathbb{N}| \leqq |\mathbb{Q}|$ が成り立つ。ここで $|\mathbb{Q}| \leqq |\mathbb{N}|$ を示そう。これが示されれば 29 節 (52) によって $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ が得られる。

まず $\mathbb{Q}$ の元（有理数）を既約分数で $\pm\dfrac{n}{m}$（n, m は自然数）の形に表す。但し 0 は $+\dfrac{0}{1}$ と表すことにする。このようにすればすべての有理数がこの形で一意的に表されるので

$$\begin{cases} +\dfrac{n}{m} \mapsto 2^n \cdot 3^m \\ -\dfrac{n}{m} \mapsto 3^n \cdot 5^m \end{cases} \tag{56}$$

とすればこの対応 $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ は写像である。しかも素因数分解の一意性定理によって単射であることも分る。従って $|\mathbb{Q}| \leqq |\mathbb{N}|$ が示された。

この自然数の集合の濃度つまり $|\mathbb{N}|$ を**可算濃度**もしくは**可付番濃度**と呼んで、$\aleph_0$ とか $\mathfrak{a}$ で表す。可算濃度は最小の無限濃度である。また可算（可付番）濃度の集合を**可算集合**あるいは**可付番集合**と呼ぶ。例えば $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ は可算集合である。

注意 : 同様のやり方で $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$ が示せる。従って $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^2|$ でもある。

31 $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$!

実数の集合を $\mathbb{R}$ で表す。このとき $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$ が成り立つ。これはつまり直線と平面との間に全単射があるということである。

$a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とする。集合 $\{x | x \in \mathbb{R}$ かつ $a < x < b\}$ を (a, b) で表して（a, b を両端とする $\mathbb{R}$ の）**開区間**と呼ぶ。まず $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ を示す。何か全単射 $(0,1) \to \mathbb{R}$ を作れば良い。例えば $x \in (0,1)$ に対して $x \mapsto \tan(\pi(x - 1/2))$ とすれば全単射になる。従って $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ である。これが分れば直ちに $|(0,1)^2| = |\mathbb{R}^2|$ が分る（理由は各自考えてみよ）。このことから $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$ を示すには $|(0,1)| = |(0,1)^2|$ を示せばいいことが分る。

$(0,1) \ni x \mapsto (x, x) \in (0,1)^2$ は単射だから $|(0,1)| \leqq |(0,1)^2|$ である。

次に $x \in (0,1)$ を $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ と小数で表示（下記注意参照）して

$$(0,1)^2 \ni (0.x_1x_2x_3\cdots,\ 0.y_1y_2y_3\cdots) \mapsto 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots \ \in (0,1) \tag{57}$$

とする。これは単射であるから $|(0,1)| \geqq |(0,1)^2|$。従って $|(0,1)| = |(0,1)^2|$ であり、$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$ が示された。

実数の濃度を**連続体濃度**と呼んで $\mathfrak{c}$ で表す。

注意 : 例えば $0.123\dot{9} = 0.124\dot{0}$ のように小数表示は重複している。そこで上記で小数表示するときは、あるところから先がすべて 9 になるものを除外する。そうすれば小数表示の重複はなく、しかもすべての数が小数表示される。このことおよび $0 = 0.000\cdots \notin (0,1)$ より、上記の写像は全射ではない。

32 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

30 節と 31 節で、直感的にはとても濃度が等しいとは思われないような集合どうしの濃度が実は等しいということを見た。このような例を見ると、「すべての無限集合の間には全単射が存在するのではないか」とさえ考えたくなるかもしれない。そしてもしそうであるならば無限濃度を考える意味はない。しかしそうではないのである。

カントルは $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ を示し、更に任意の集合 A に対して $|A| < |\mathfrak{P}(A)|$ を示した。後者からどんな濃度に対しても、それより更に大きな濃度が存在することが分る。以下でこれらを証明する。

最初に $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ の証明を述べる。
$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$ だから $|\mathbb{N}| \leqq |\mathbb{R}|$ は明らかである。また 31 節で示したように、$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ だから $\mathbb{N}$ から $(0,1)$ への全単射が存在しないことを示せば十分である。

まず 31 節と同じように $(0,1)$ の元を小数で表示する。この小数表示の内容を正確にいうと次のようになる（31 節の注意で簡単に触れた内容だがここでは少し詳しく説明する）。

$(0,1)$ に属する実数は小数表示で 0. の後に 0 から 9 までの十個の記号を可算無限個並べたものとして表せる（有限小数については例えば 0.123 であったらそれを 0.123000000000⋯ とすれば良い）。ただしあるところから先が全て 9 になるようなものは除外する。そうすれば繰り上がりが生じて表現が重複する（例えば

$0.1\dot{9}=0.2\dot{0}$）こともなく、$0.\dot{9}=1\notin(0,1)$ も除外できる。また $0.\dot{0}=0\notin(0,1)$ だからこれも除外する。そうすれば $(0,1)$ と、この記号列の集合

$\{x|x=0.*****\cdots$, 但し $*****\cdots$の部分は 0 から 9 までの十個の記号の任意の可算無限列の内、
全てが 0 であるものと、あるところから先が全て 9 であるようなものとを除いたもの $\}$

との間に 1 対 1 の対応がつけられる（つまり全単射が存在する)。そこでこの記号列の集合と $(0,1)$ を同一視する。

証明は背理法による。
もし $\mathbb{N}$ から $(0,1)$ への全単射があればこの全単射は以下のように並べて表現されるはずである。

$$
\begin{array}{l}
1 \longmapsto 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}\cdots \\
2 \longmapsto 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}\cdots \\
3 \longmapsto 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}\cdots \\
4 \longmapsto 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}\cdots \\
5 \longmapsto 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}a_{57}\cdots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

ここで $a_n=\begin{cases}1 & (a_{nn}\neq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a_{nn}=1 \text{ のとき})\end{cases}$ として小数 $a=0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\cdots$ を考える。a の小数点以下には 1 または 2 だけがあらわれるので、$a\in(0,1)$ だが、$a_n\neq a_{nn}$ なので a は上記の対応表の中にはあらわれない。これは上記の対応が全単射であることに矛盾する。よって $\mathbb{N}$ から $(0,1)$ への全単射は存在しない。以上をカントルの対角線論法という。

次いで $|A|<|\mathfrak{P}(A)|$ の証明を述べる。
$A\ni x\mapsto\{x\}\in\mathfrak{P}(A)$ によって単射 $A\to\mathfrak{P}(A)$ が定義できるので $|A|\leqq|\mathfrak{P}(A)|$ である。

全単射 $A\to\mathfrak{P}(A)$ が存在しないことを示す。発想は今の $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$ の証明と同じであり、これも対角線論法と呼ばれる。まず A から $\mathfrak{P}(A)$ への全単射 $A\xrightarrow{f}\mathfrak{P}(A)$ が存在すると仮定して $B=\{x|x\in A$ かつ $x\notin f(x)\}$ と置く。当然 B は A の部分集合なので $B\in\mathfrak{P}(A)$ である。f は全単射なので $\exists a\in A$ で $f(a)=B$ となるはずである。ここで B が元 a を含むか否かを考える。もし $a\in B$ とすると B の作り方から $a\notin f(a)=B$ となって矛盾する。一方 $a\notin B=f(a)$ とすると a は $a\in A$ かつ $a\notin f(a)$ だから $a\in B$ となってやはり矛盾である、よって証明された。

33　最大元、極大元、上界、上限

$(A,\preceq)$ を順序集合とする。

最大元　$a\in A$ が $\forall x\in A$ に対して $x\preceq a$ を満たすとき、a は A の**最大元**であるという。
極大元　$a\in A$ が $\forall x\in A$ に対して $a\preceq x\Longrightarrow a=x$ を満たすとき、a は A の**極大元**であるという。
最小元　$a\in A$ が $\forall x\in A$ に対して $a\preceq x$ を満たすとき、a は A の**最小元**であるという。
極小元　$a\in A$ が $\forall x\in A$ に対して $x\preceq a\Longrightarrow a=x$ を満たすとき、a は A の**極小元**であるという。

最大元が存在するなら当然一つだけである。そこで A に最大元が存在するとき、その最大元を $\max A$ で表す。同様に最小元が存在するなら一つだけである。最小元が存在するとき、その最小元を $\min A$ で表す。

最大元があればそれは唯一の極大元である。同様に最小元があればそれは唯一の極小元である。しかし一般的には極大元や極小元は複数（無限個も可）存在し得る。なお全順序集合に於いては最大元の概念と極大元の概念は同じである。同様に全順序集合に於いては最小元の概念と極小元の概念は同じである。

$(A, \preceq)$ を順序集合、$(U, \preceq)$ をその部分順序集合とする。

上界　$a \in A$ が $\forall x \in U$ に対して $x \preceq a$ を満たすとき、a は U の**上界**であるという。
上限　U の（A 内の）上界が最小元を持つとき、その最小元を U の（A 内の）**最小上界**あるいは**上限**という。
下界　$a \in A$ が $\forall x \in U$ に対して $a \preceq x$ を満たすとき、a は U の**下界**であるという。
下限　U の（A 内の）下界が最大元を持つとき、その最大元を U の（A 内の）**最大下界**あるいは**下限**という。

上限が存在するなら当然一つだけである。そこで A に上限が存在するとき、その上限を $\sup A$ で表す。同様に下限が存在するなら一つだけである。下限が存在するとき、その下限を $\inf A$ で表す。

U が最大元を持つことと U が上限を持ち、しかもその上限が U に属することとは同じである。同様に、U が最小元を持つことと U が下限を持ち、しかもその下限が U に属することとは同じである。

U が A 内に上界を持つとき、U は A で**上に有界**であるという。U が A 内に下界を持つとき、U は A で**下に有界**であるという。U が A で上にも下にも有界のとき、U は A で**有界**であるという。

注意１：$\forall a \in A$ に対して a は $\emptyset$ の上界であると同時に下界でもある。実際 a が $\emptyset$ の上界であるための条件は $\forall x(x \in \emptyset \Longrightarrow x \preceq a)$ だが、a が何であれこれは真である。下界の方も同様である。

注意２：例えば集合 $\{1, 2\}$ に対して順序 $\leqq$ を考えたとき最大元は 2、最小元は 1 である。しかし順序 $\geqq$ を考えたとき、この順序に関しては最大元が 1、最小元が 2 である。

34　切片

$(A, \preceq)$ を順序集合とし、$a \in A$ とする。

切片　集合 $\{x | x \in A$ かつ $x \preceq a$ かつ $x \neq a\}$ を A の a による**切片**と呼んで、$A\langle a \rangle$ で表す。

$\exists a \in A$ で $B = A\langle a \rangle$ のとき B は A の切片であるという。いうまでもなく、「$A\langle a \rangle$」と書いたり、「B は A の切片である」と述べたりしたときは $A\langle a \rangle$ や B は A の部分順序集合であると考える。$A\langle a \rangle = \emptyset$ と a が A の極小元であることとは同値である。

35　整列順序

全順序集合 $(A, \preceq)$ が「A の空でない部分順序集合は必ず最小元を持つ」という性質を満たすとき、A を**整列集合**といい、$\preceq$ を整列順序という。A が整列集合で、$a \in A$ が最大元でなければ a の**直後の元**が存在する。但しここで $b \in A$ が a の直後の元であるとは $a \neq b$ であって、しかも $\forall x \in A$ に対して $a \preceq x \preceq b$ ならば $x = a$ または $x = b$ が成り立つことをいう。実際 $U = \{x | x \in A$ かつ $a \neq x$ かつ $a \preceq x\}$ とすれば a が全順序集合 A の最大元ではない、つまり A の極大元ではないから、$U \neq \emptyset$ である。A は整列集合だから U には最小元がある。この最小元 $\min U$ が a の直後の元であることは明らかである。

例えば $\mathbb{N}$ は（通常の数の大小関係に関して）整列集合である。そして $\mathbb{N}$ には最大元がない。いうまでもなく $n \in \mathbb{N}$ の直後の元は $n + 1$ である。

注意１：整数の集合を $\mathbb{Z}$ で表す。$\mathbb{Z}$ は（通常の数の大小関係に関して）整列集合ではない。なぜなら $\mathbb{Z}$ に

は最小元がないからである。

注意２ ： 全順序集合 $(\emptyset, \emptyset)$ は整列集合である。

36　整列可能定理

整数は通常の大小関係に関して整列集合ではない。しかし例えば

$$0 \preceq (-1) \preceq (+1) \preceq (-2) \preceq (+2) \preceq (-3) \preceq (+3) \cdots$$

のようにすれば $(\mathbb{Z}, \preceq)$ は整列集合になる。一般に可算集合ならば同様のやり方で整列順序を定義できる。また有限集合の全順序がすべて整列順序なのは明らかである。それでは可算ではない無限集合例えば $\mathbb{R}$ に整列順序を定義できるだろうか？到底できそうに無いように感じるが、信じがたいことに次の定理が成り立つ。

整列可能定理　任意の集合 A に対して、$(A, \preceq)$ が整列集合になるような順序 $\preceq$ が存在する。

念のため、この定理のいい回しについて確認しておく。この定理を記号で書くと、

$$\forall A (A \text{ は集合}) \text{ に対して } \exists \preceq \text{（順序関係）で } (A, \preceq) \text{ は整列集合}$$

となる。各集合に対して整列順序が定義できるという意味である。決して

$$\exists \preceq \text{（順序関係）で } \forall A (A \text{ は集合}) \text{ に対して } (A, \preceq) \text{ は整列集合}$$

の意味ではない。これだと何か順序があってこの順序はすべての集合に対して整列順序を定義するという奇怪な話になってしまう。なおこの定理は整数に整列順序を定義したような「具体的な」やり方で証明されるわけではない（そのような具体的なやり方は多分無いと思う）。これは 38 節で述べるツォルンの補題を使って証明される（文献 ： 松坂 [3] を参照）。

37　帰納的順序集合

任意の全順序部分集合が上界を持つとき、その順序集合を**帰納的順序集合**と呼ぶ。

$\mathbb{N}$ は（通常の大小関係について）帰納的順序集合ではない。なぜなら $\mathbb{N}$ 自身 $\mathbb{N}$ の全順序部分集合であり、$\mathbb{N}$ は（$\mathbb{N}$ 内に）上界を持たないからである。

今自然数とは異なる対象 ω を考えて $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ と置き、さらに $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \leqq \omega$、$\omega \leqq \omega$ として順序 $\leqq$ を Ω に拡張して順序集合 $(\Omega, \leqq)$ を考えれば、$(\Omega, \leqq)$ は帰納的順序集合である。なぜなら ω が Ω の任意の部分順序集合（もちろんそれは常に全順序部分集合）の上界だからである。

注意 ： A を帰納的順序集合とする。12 ページの 20 節で述べたように $\emptyset$ はその全順序部分集合である。これが上界を持つのだから A にはその上界があり従って A は空集合ではない、つまり $A \neq \emptyset$ である。

38　ツォルンの補題

（補題というのは他の定理を証明するために使う定理という意味で、補助定理ともいう。）

ツォルンの補題　帰納的順序集合は極大元を持つ

証明は文献 ： 松坂 [3] を参照されたい。ツォルンの補題は集合論以外に代数などでもよく使われる。

39　素朴集合論の矛盾

素朴集合論には矛盾があることが知られている。有名な例を二つ挙げる。

カントルの逆理　X を集合の集まりとする。素朴集合論の集合の定義からすれば、X も集合である。よって X は「集合の集合」である。ここで $\mathfrak{P}(X)$ の元は集合だから、 $\mathfrak{P}(X) \subsetneqq X$ である。埋め込み $\mathfrak{P}(X) \hookrightarrow X$ を考えると $|\mathfrak{P}(X)| \leqq |X|$ だが、これは $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$ に反する。

ラッセルの逆理　X を自分自身を含まない集合の集まりとする。つまり $X = \{x|x$ は集合でしかも $x \notin x\}$ とする。素朴集合論の集合の定義からすれば、X も集合である。よって X は「自分自身を含まない集合の集合」である。ここで X は X 自身を含むか否か、つまり $X \in X$ かあるいは $X \notin X$ のどちらであるかを考える。
$X \in X$ とすると X の定義から $X \notin X$ となってしまう。一方 $X \notin X$ とすると X の定義から $X \in X$ となってしまう。

これらの逆理はいわゆる直感的な議論の限界を示すものと考えられる。そこでこのような直感的な議論を排すべく、集合論を一種の記号ゲームとして客観化するという方針で構築されたのが公理的集合論である。なお記号ゲームそのものはコンピュータでも扱えるはずであり、その意味で客観的であるが、実際に記号ゲームについて議論するときには我々の直感が使われる。物事の真偽を感じるのは我々の心であるから、最後の所で直感が使われるのは当たり前のことである。公理的集合論には「超数学」という誤解されかねない言葉が出てくるが、これは数学を対象として扱う立場という意味で「超」なのであって、数学を超えた論理という意味ではない。超数学で使っている論理も最終的には、普通の数学で使っている直感による論理である。

ところで、今述べたような矛盾は集合の集まりのように非常に大きな集まりまで集合と考えたことによるもので、例えば微分積分をやるときには実数の集合を基本にして、その直積集合やベキ集合、そして実数から実数への関数（写像）の集合等々を扱うことになるが、こういった集合を扱っている限りは素朴集合論で十分である。

40　参考文献

参考文献

[1] 彌永昌吉 ・ 健一『集合と位相Ｉ』岩波講座基礎数学（岩波書店）
[2] ブルバキ『集合論１』ブルバキ数学原論（東京図書）
[3] 松坂和夫『集合 ・ 位相入門』岩波書店
（本資料の記法のほとんどはこの本の記法に従っている。）
[4] I.N.Bronstein ・ K.A.Semenjaef ／原著 ・ G.Groche ・ V.Ziegler ・ D.Ziegler ／編集 ・ 東京工業大名誉教授　理博　矢野健太郎／監修 ・ 宮本敏雄／訳編
『数学ハンドブック』森北出版