平成２１年７月６日　八起数学塾

実対称行列の対角化

1　実対称行列の直交行列による対角化

A を n 次の実対称行列とする。A を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の行列と考えれば、A はエルミート行列である。従って A はユニタリ行列によって対角化可能であり、またその固有値はすべて実数である。

これはつまり $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を A の異なる固有値のすべてとし、$\mathbb{C}$ 上で考えた時の α_i に関する A の固有空間を W_i とすると、$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$（直和）であり、$i \neq j$ なら $W_i \perp W_j$ が成り立つということである。

一方固有値 α_i は実数なので、実数体 $\mathbb{R}$ 上での α_i の固有空間、W_i' を考えることができるが、明らかに $W_i' = W_i \cap \mathbb{R}^n$ であり、さらに $\dim_{\mathbb{C}} W_i = n - \mathrm{rank}(\alpha_i E - A) = \dim_{\mathbb{R}} W_i'$ が成り立ので、$\mathbb{R}^n = W_1' \oplus W_2' \oplus \cdots \oplus W_m'$（直和）であることが分る。また $i \neq j$ なら $W_i \perp W_j$ であるから、$i \neq j$ なら $W_i' \perp W_j'$ であることも分る。そこで各 W_i' について正規直交基底を作り、それらをすべて集めれば $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底ができる。

ここで基底の取替え「標準基底 $\longrightarrow$ 今作った正規直交基底」の行列を P とすれば P は実ユニタリ行列つまり直交行列であって $P^{-1}AP$ は対角行列である。すなわち対角行列は直交行列によって対角化できることが分った。

2　もう少し直接的な証明について

”別資料「三角行列」の補足”のやり方によって、もっと直接的な証明ができる。対称行列の固有値は実数であり、従ってそれに対応する実固有ベクトルが存在する。また、T が V の対称変換であるとは、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{y}))$ が成り立つ事であるから、T をその不変部分空間に制限したものもやはりその不変部分空間の対称変換である。以上から”別資料「三角行列」の補足”で述べた議論が適用でき、所望の結果が得られる。なおこの場合 T の随伴変換は T 自身である。具体的には別資料「三角行列」を参照されたい。